3. Suche in Graphen

3.1 Wege, Pfade, Bäume

Vorspann: Paul Erdös (26.3.1913 – 20.9.1996)
Produktivster Mathematiker aller Zeiten (≈ 1500 Artikel)
(„Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler")

Erdös-Zahl:

Erdös-Graph: Knoten ≙ Wissenschaftler
Kanten ≙ Verbindungen durch gemeinsam geschriebene Artikel

Erdös-Zahl: Kürzester Abstand zu Erdös im Erdös-Graphen, also

Erdös: EZ 0

Koautoren von Erdös (~~502~~): EZ 1 (z.B. Ron Graham)

Koautoren von Koautoren von Erdös, aber nicht Koautoren (8162): EZ 2 (z.B. Sándor Fekete)

usw.!

EZ ∞ ?!

→ Datenbanken, z.B. DBLP

Kevin Bacon (*8.7.1958)

Filmschauspieler (64 Filme in IMDb)

Kevin-Bacon-Zahl:

Kevin-Bacon-Graph: Knoten ≙ Schauspieler

Kanten ≙ Verbindungen durch gemeinsam gedrehte Filme

Kevin-Bacon-Zahl: Kürzester Abstand zu Kevin Bacon im Kevin-Bacon-Graphen, also

Kevin Bacon:	KBZ 0	
Ko-Stars von K.B.:	KBZ 1	(z.B. Tom Hanks)
Ko-Ko-Stars von K.B.:	KBZ 2	(z.B. Elvis)

usw.!

KBZ ∞ ?!

→ Datenbanken, z.B. IMDb

→ Soziale Netzwerke!

("6 degrees of separation")

Also:
- Graphen können groß sein
- Graphen können unübersichtlich sein
- Verbindungen in Graphen sind vielfältig, interessant, wichtig!

Problem 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t

Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

Problem 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s

Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (d.h. Zshgskomp. von s), Wege, die Erreichbarkeit realisieren

Beobachtung:

Satz 3.3

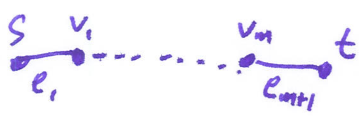
Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

(Also: ... dann existiert ein Weg ohne doppelt besuchte Knoten.)

Beweis:

Sei $W = s, e_1, v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, t$ ein Weg von s nach t.

Idee:



Eliminiere Kreise auf dem Weg!

Technische Umsetzung:

Angenommen, es existiert kein Pfad, also gibt es nur doppelt besuchte Knoten. Betrachte einen Weg mit der kleinstmöglichen Zahl doppelt besuchter Knoten. Sei v_i einer davon.

Technische Umsetzung:

Angenommen, es gibt einen Weg; dann betrachte ~~eine~~ unter allen Wegen einen (W) mit möglichst wenigen Kanten.

Hätte dieser W einen doppelt besuchten Knoten:

$$W' = s, e_1, v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erster Besuch}}}{v_i}, e_{i+1}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzter Besuch}}}{v_i}, e_k, \ldots, t$$

- dann gäbe es einen noch kürzeren Weg:

$$W'' = s, e_1, v_1, \ldots, v_i, e_k, \ldots, t.$$

Also ist W' ein Pfad! $\square$

Konsequenz:

Korollar ~~Satz~~ 3.4 ← „Logische Zugabe"

Für Problem 3.2 gibt es ~~immer~~ als Erreichbarkeit sichernde Menge von Kanten immer eine Menge, die keinen Kreis enthält.

Verschärfung aus dem Beweis:

Korollar ~~Satz~~ 3.5

Für Problem 3.2 gibt es immer eine kreisfreie Menge von Kanten, die die kürzestmögliche Erreichbarkeit sichert.

Das motiviert die folgende

Definition 3.6 (Wald, Baum)

(i) Ein Wald ist ein kreisfreier Graph.

(ii) Ein Baum ist eine Zusammenhangskomponente in einem Graphen (also: ein kreisfreier, zusammenhängender Graph)

(iii) Ein aufspannender Baum ist ein Baum, der alle Knoten verbindet.

3.2 Zusammenhangskomponenten

Idee: ~~suche alle Nachbarn~~ Löse Problem 3.2 durch systematisches Hinzunehmen von Nachbarn!

Algorithmus 3.7 (Graphen-Scan-Algorithmus)

Input: Graph $G=(V,E)$, Knoten s

Output: Knotenmenge $R \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist, sowie eine Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit von R sicherstellt, d.h. einen die Zusammenhangskomponente von s aufspannenden Baum (R,T).

① Sei $R := \{s\}$, $Q := \{s\}$, $T := \emptyset$.

② WHILE $(Q \neq \emptyset)$ DO {

wähle $v \in Q$

③ IF (es gibt kein $w \in V \setminus R$ mit $e = \{v,w\} \in E$) THEN $\cancel{\{}$

$Q := Q \setminus \{v\}$

④ ELSE {

wähle ein $w \in V \setminus R$ mit $e = \{v,w\} \in E$

setze $R := R \cup \{w\}$, $Q := Q \cup \{w\}$, $T := T \cup \{e\}$

}

}

⑤ STOP.

21.11.07

Satz 3.8

(i) Das Verfahren 3.7 ist endlich.

(ii) Das Verfahren 3.7 funktioniert korrekt.

Beweis:

(i) Bei jedem Durchlauf der Schleife ② wird entweder in ③ ein Element aus Q entfernt, oder in ④ ein Element zu R hinzugefügt und ein Element zu Q hinzugefügt. Offenbar kann man also ④ nur $(n-1)$-mal durchlaufen, also auch nur Q $(n-1)$-mal erweitern, also Q höchstens n-mal verkleinern. ② kann also höchstens $(2n-1)$-mal durchlaufen werden.