Satz 2.12

(i) Das Verfahren 2.11 ist endlich

(ii) Der Algorithmus liefert eine Zerlegung in einen Weg (falls es anfangs zwei ungerade Knoten gibt) und geschlossene Wege.

Beweis:

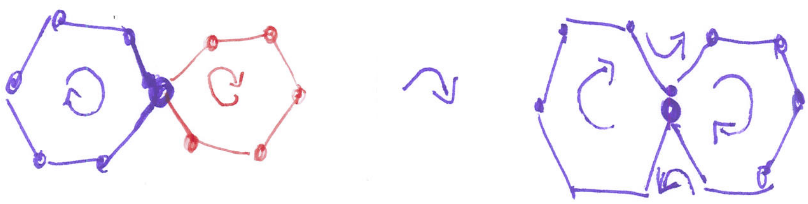
(i) Bei jedem Durchlaufen von (B) wird (2) durchlaufen, bei jedem Durchlaufen von (2) wird eine Kante entfernt, was nur endlich oft passieren kann.

(ii) Klar nach Satz 2.9 über Algorithmus 2.8:
Bei anfangs zwei ungeraden Knoten wird ein Weg gefunden, danach ist der Restgraph eulersch, und es werden geschlossene Wege gefunden. $\square$

Jetzt bleibt, aus den u.U. vielen Wegen einen zu machen!

Beobachtungen 2.13

(i) Zwei geschlossene Wege mit einem ~~geschlossenen~~ gemeinsamen Knoten kann man in einen geschlossenen Weg verwandeln:



(ii) Man kann aus allen ~~geschlossenen~~ Wegen EINEN Weg machen, wenn der Graph zusammenhängend ist. (Immer wieder (i) anwenden!)

Also erhalten wir einen möglichen Lösungsweg:

(I) Zerlege die Kantenmenge mit Algorithmus 2.11 in Wege

(II) Verschmelze die Wege in einen.

Alternative:

<u>Algorithmus 2.14</u>

Input: zshgder. Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten.

Output: Eulerweg bzw. Eulertour in G.

(A) Wähle Startknoten v_0 (ungerade falls vorhanden, sonst beliebig)

(B) Bestimme Weg W von v_0 aus wie in Algorithmus 2.8

(C) Solange es noch unbenutzte Kanten gibt

  (1) Wähle einen von W besuchten Knoten v_0' mit positivem Grad im Restgraphen.

  (2) Bestimme Weg W' von v_0' aus wie in Algorithmus 2.8.

  (3) Verschmelze W und W'.

(D) STOP

<u>Satz 2.15</u>

(i) Das Verfahren 2.14 ist endlich.

(ii) Alle Anweisungen lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.14 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

Beweis:

(i) Wie immer: Man kann nur endlich viele Kanten entfernen.

(ii) Solange es noch unbenutzte Kanten gibt, kann man diese auch von den besuchten Knoten aus erreichen, denn G ist zusammenhängend. Also gibt es eine unbenutzte Kante, die zu einem besuchten Knoten inzident ist.

(iii) Am Ende haben wir einen Weg und es gibt keine unbenutzten Kanten mehr! $\square$

Es geht noch einfacher:

Algorithmus 2.16 (Fleurys Algorithmus)

Input: Zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

Output: Eulerweg bzw. Eulertour in G.

(1) Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig); setze $i=0$

(2) Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

  (a) Wähle eine Kante aus, deren Entfernung den Restgraphen nicht in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt.

  (b) Laufe zum Nachbarknoten v_j

  (c) Lösche die Kante aus der Menge der unbenutzten Kanten.

  (d) Setze $v_{i+1} := v_j$

  (e) Setze $i := i+1$

(3) STOP

Satz 2.17

(i) Verfahren 2.16 ist endlich.

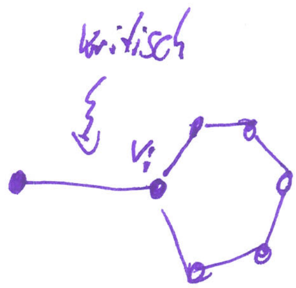
(ii) ~~Verfahren~~ Alle Anweisungen lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.16 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

Beweis:

(i) Wie immer.

(ii) Kritisch ist (2)(a). Wenn es nur eine Kante gibt, bleibt der Restgraph zusammenhängend, wenn man diese entfernt. Wenn es mehrere Kanten gibt, kann ~~alle~~ höchstens eine davon durch Entfernen den Restgraphen zerlegen, denn die anderen sind danach in geschlossenen Wegen enthalten. Also wählt man eine der anderen.



(iii) Man hat immer einen zusammenhängenden Restgraphen, kann also keine Kanten zurücklassen.

$\square$

Mit den Worten eines berühmten Graphentheoretikers:

Some citizens of Königsberg
Were walking on the strand
Beside the river Pregel
With its seven bridges spanned.

O, Euler come and walk with us
Thus burghers did beseech
We'll walk the seven bridge o'er
And pass but once by each.

'It can't be done' then Euler cried
'Here comes the Q.E.D.
Your islands are but vertices
And all of odd degree.

William T. Tutte (* 1917, + 2002)

Studium der Chemie in Cambridge

Auf Empfehlung 1941 zur Dekodierungs- und Dechiffrierungsschule in Bletchley (→ Turing)

Turing: Enigma, mit Start durch gutes Modell der Maschine

Tutte: Lorenz SZ 40/42 → Leitete Struktur der Maschine nur aus einigen codierten (!) Nachrichten her

→ Daraufhin Bau des Colossus-Computers (1943/44), große streng geheime Abteilung

(Nach dem Krieg zerstört, kaum Anerkennung für Tutte – ein sehr bescheidener Mann!)

Nach dem Krieg nach Kanada, gründete 1957 das „Department of Combinatorics and Optimization" in Waterloo, wo viele der berühmtesten Optimierer und Graphentheoretiker studiert oder gearbeitet haben. (Auch Leute wie Nils Schweer oder Sándor Fekete...)

Viele Beiträge zur Graphentheorie, auch das erste Beispiel eines Polyeders, dessen Ecken/Kantengraph nicht Hamiltonsch ist.