06.11.2007

Definition ~~2~~ 1.3 (Wege in Graphen)

(1) (i) Eine Kante $e = \{v, w\}$ verbindet v und w, und v und w sind adjazent („benachbart"), v ist Nachbar von w.

(ii) Außerdem ist v inzident zu e
($\hat{=}$ „zusammentreffend mit")

(2) (i) Ein Teilgraph $H = (V(H), E(H))$
eines Graphen $G = (V(G), E(G))$
ist ein Graph mit

$$V(H) \subseteq V(G)$$
$$E(H) \subseteq E(G)$$

Teilmengen!

(ii) H ist aufspannend, wenn $V(H) = V(G)$.
(Alle Knoten sind mit dabei!)

(3) (i) Eine Kantenfolge W in G ist eine Folge

$$v_1, e_{1,2}, v_2, e_{2,3}, v_3, \ldots, e_{k,k+1}, v_{k+1}$$

mit $k \geq 0$, $e_{i,i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$.

(ii) Wiederholt sich keine Kante in einer Kantenfolge, dann spricht man von einem <u>Weg</u>.

(iii) Wiederholt sich kein Knoten, spricht man von einem <u>Pfad</u>.

(iv) Ein <u>geschlossener Weg</u> ~~oder Pfad~~ kehrt am Ende zum Startknoten zurück.

(v) Ein ~~geschlossener~~ <u>Kreis</u> ist ein geschlossener Pfad (→ Rückkehr zum Anfangsknoten)

(vi) Ein <u>Eulerweg</u> benutzt alle Kanten eines Graphen, eine Eulertour kehrt zum Anfang zurück.

(vii) Ein <u>Hamiltonpfad</u> besucht alle Knoten eines Graphen.

(viii) Ein Hamiltonkreis ~~ist~~ besucht alle Knoten eines Graphen und kehrt zum Anfangsknoten zurück. (Alternativer Name: „<u>Tour</u>")

Sir William Hamilton *1805 †1865

(4) Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt.

(5) Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der inzidenten Kanten. (Schreibweise: $\delta(v)$) $\square$

Damit können wir jetzt sauber definieren:

<u>Problem 2.4</u> (Eulerweg)

Gegeben: Ein Graph $G=(V,E)$

Gesucht: Ein Eulerweg W - oder ein Argument, dass kein Eulerweg existiert.

Satz 2.5 (Euler)

(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.

(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen geschlossenen Eulerweg haben, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Beweis: Siehe oben!

$\square$

Fragen:

(I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?

(II) Die Bedingungen oben sind notwendig, d.h. müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch hinreichend, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Weg?

(III) Wie findet man einen Eulerweg?

(III') Wie sieht ein Algorithmus zum Finden eines Eulerweges aus?

Antwort auf (I): etwas allgemeiner:

Satz 2.6

Für jeden beliebigen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

Beweis:

In Aufgabe 3 (d) des Übungsblattes 1 zeigt man, dass

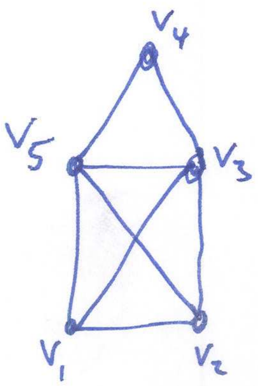
$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m \text{ ist,}$$

d.h. die Summe aller Grade ist eine gerade Zahl. Das kann nur dann der Fall sein, wenn es eine ~~un~~gerade Zahl von ungeraden Summanden $\delta(v_i)$ gibt.

□

Es kann also nicht vorkommen, dass es nur einen Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Vorüberlegung zu (II) und (III):



F: (i) Wo beginnen, wo enden?
(ii) Wie laufen?

A: (i) In v_1 und v_2 (ungerade Knoten!)

(ii) z.B.
$v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1, v_5, v_3, v_2$

oder $v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_5, v_4, v_3, v_2$