- Zurück zu Quicksort:
  - Eingabe: $a_1\ a_2\ \dots\ a_n$
  - Ausgabe: $s_1\ s_2\ \dots\ s_n$ sortierte Zahlenfolge

Satz 5.9

Die Average-Case-Laufzeit von Quicksort ist $O(n \log n)$.

Beweis:

Beobachtung: Zwei Elemente s_i und s_j werden höchstens einmal miteinander verglichen.
(Genau dann, wenn s_i oder s_j Referenzelement ist)

Zufallsvariable

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & , s_i \text{ und } s_j \text{ werden verglichen} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$ ist die

gesamte Anzahl an Vergleichen.

Damit:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right]$$

$$(*) \quad = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{E[X_{ij}]}$$

$$= 1 \cdot P(X_{ij}=1) + \underbrace{0 \cdot P(X_{ij}=0)}_{=0}$$

Wir müssen also die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass s_i und s_j verglichen werden.

Dafür setzen wir

$$S_{ij} := \{s_i, \dots, s_j\}$$

Dann ist

$$P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij})$$

- denn wird zuerst ein Pivot dazwischen gewählt, werden s_i und s_j nicht mehr verglichen!

Da nur einer von s_i und s_j erster Pivot sein kann, gilt

$$P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij})$$
$$= P(s_i \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}) + P(s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij})$$

$$= \frac{1}{j-1+1} + \frac{1}{j-1+1} = \frac{2}{j-1+1} \qquad (**)$$

- denn die Pivots werden zufällig und unabhängig gewählt, und die Menge S_{ij} hat $j-1+1$ Elemente.

Jetzt kombinieren wir (*) und (**):

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

↓ Setze $k = j-i$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}$$

$$< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

Jetzt kann man die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n}$$

abschätzen:

$$\leq \underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1} \ldots + \frac{1}{2^{\log_2 n}}$$

$1 + \log_2 n$ Einsen →

Also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \log_2 n$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \in \Theta(\log n)$$

Und damit

$$E[X] \in \Theta(n \log n).$$

$\square$