5.5.2 Worst Case

Ein Beispiel:

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Referenzelemt

Am Ende von Partition:

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Quicksort

10 9 8 7 6 5 4 3 2

Referenzelement

- Im schlechtesten Fall ist das Referenzelement jedesmal die kleinste (oder größte) Zahl.
- Dann ist die Aufteilung: 1 .... n-1 n

Satz 5.7

Die Worst-Case-Komplexität von Quicksort ist $O(n^2)$.

Beweis:

Partition benötigt für einen k-elementigen Array k-1 Vergleiche.

n Elemente:	n-1
n-1 "	n-2
⋮	
1	0

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2} \in O(n^2)$$

$\square$

5.5.3 Best Case

- Im günstigsten Fall ist das Referenzelement der Median, d.h. es teilt die Elemente in zwei Mengen, die sich in der Größe um höchstens 1 unterscheiden.

  ↳ Bisektion

- Damit erhalten für folgende Rekursionsgleichung für die Anzahl $V(n)$ der Vergleiche:

$$V(n) = (n-1) + 2 \cdot V\left(\frac{n}{2}\right)$$

mit $V(1) = 1$.

- Lösung: $V(n) = n \cdot \log n + O(n)$

  und damit $V(n) \in O(n \log n)$ (im besten Fall).

5.5.4 Average Case

- Durchschnittliche Laufzeit.

  ↳ worüber?

- Zahlenfolge: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

  ↳ Wie viele Permutation dieser Zahlen gibt es?

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{= n!}$$

- Jede Permutation kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen: $\frac{1}{n!}$

- Zunächst ein Algorithmus, für den die Average-Case-Analyse eher einfach ist:

<u>Insertionsort:</u>

Input: Array $A[1 \dots n]$

Output: Sortierter Array A.

```
FOR i ← 2 TO n DO
    FOR k ← i TO 2 DO
        IF A[k] < A[k-1]
            tausche A[k] <=> A[k-1]
        ELSE
            break
```

Satz 5.8

Insertionsort hat eine Average-Case-Laufzeit von $O(n^2)$.

Beweis:

Betrachte die Sequenz $A[1] \dots A[i]$.

$A[i]$ sei das j-größte Element in dieser Sequenz.

Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{1}{i}$

Damit ist der Erwartungswert: $\sum_{j=1}^{i} j \cdot \frac{1}{i}$

$$= \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{i} \cdot \frac{i \cdot (i+1)}{2} = \frac{i+1}{2}$$

Damit ergibt sich die mittlere Anzahl an Vergleichen als

$$V(n) \leq \sum_{i=2}^{n} \frac{i+2}{2} \leq \frac{(n+1)(n+2)}{4} \in O(n^2)$$

$\square$

Also: Worst Case und Average Case sind (fast) gleich!