(3) Anderes Beispiel : Wachstumsverhalten!

(i) $f(n+1) = \underset{\uparrow \text{Wachstumsrate}}{(1+r)}\, f(n)$, $f(0) = z_0$

↳ beschreibt
- Bevölkerungswachstum
- Zinswachstum

Lösung: $f(n) = z_0 \cdot (1+r)^n$

(ii) Bei begerenzten Ressourcen:

Fruchtbarkeit:

$$f(n+1) = q_f \cdot f(n)$$

Verhungern:

$$f(n+1) = (G - f(n)) \cdot q_v$$

→ Zusammen:

$$\boxed{f(n+1) = q_f \cdot q_v \cdot f(n)\,(G - f(n))}$$

„Logistische Gleichung" (Verhulst 1837)

klassisches Bild: (→ 143)

Diskrete Dynamik ist aber auch fraktal bzw. chaotisch → 144

(Feigenbaum 1975)

143

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b

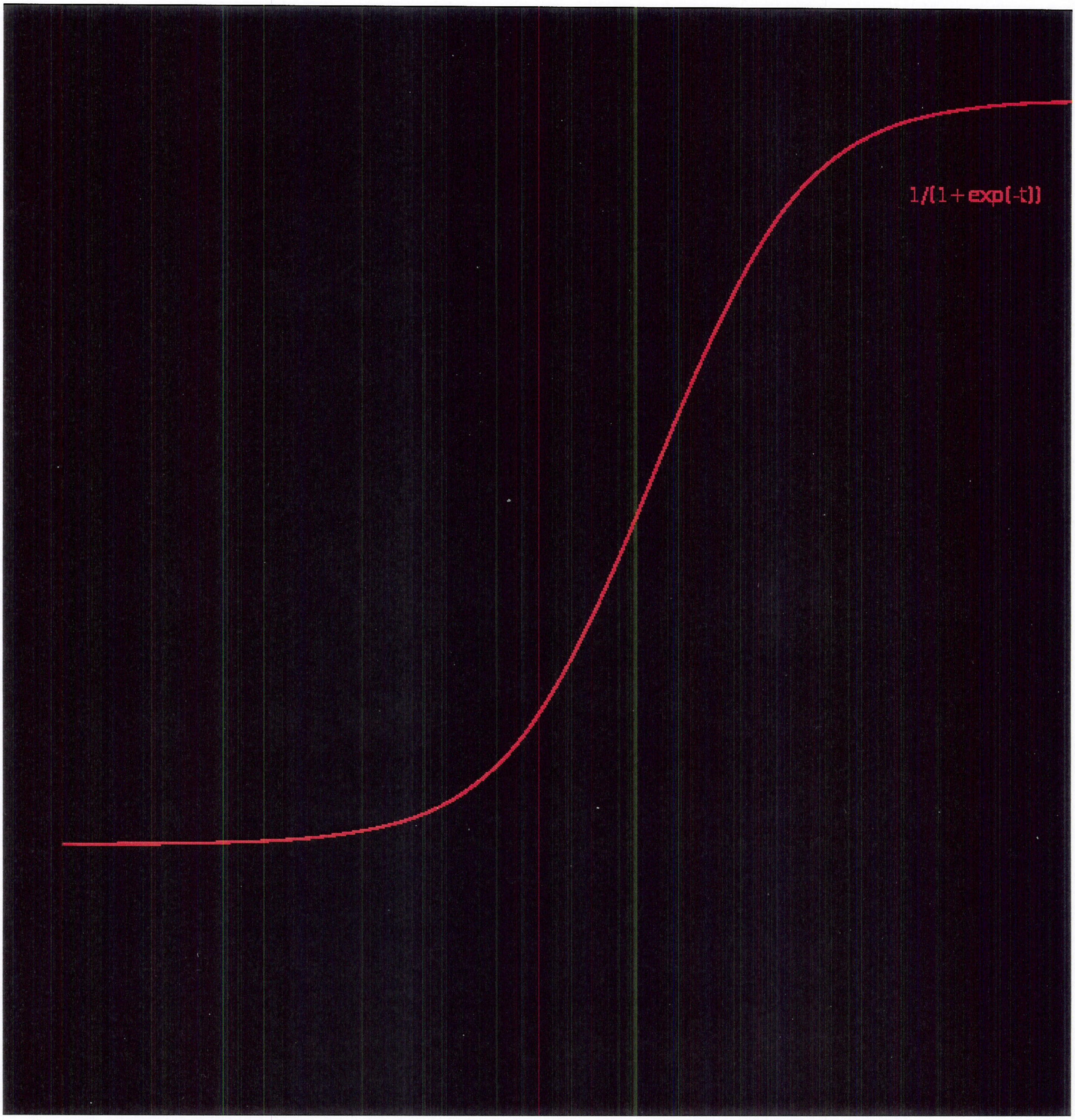
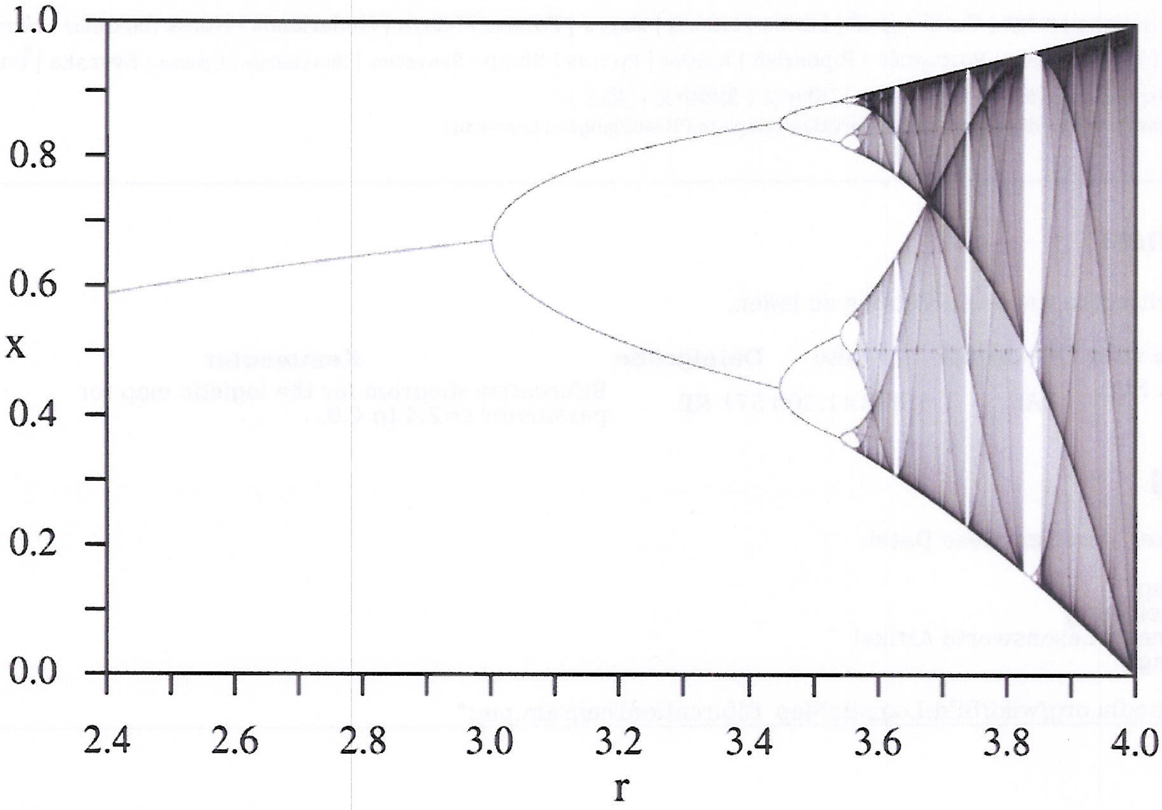


Bild:LogisticMap BifurcationDiagram.png

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

- Bild
- Dateiversionen
- Verwendung



Größe der Voransicht: 800 × 566 Pixel
Version in höherer Auflösung (1.838 × 1.300 Pixel, Dateigröße: 571 KB, MIME-Typ: image/png)

Diese Datei wird aus dem zentralen, mehrsprachigen Dateiarchiv Wikimedia Commons eingebunden. Die Quellen- und Lizenzangaben nach dem roten Trennstrich stammen von der **Original-Beschreibungsseite (http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:LogisticMap_BifurcationDiagram.png?uselang=de)** der Datei.

Summary

A bifurcation diagram for the Logistic map:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

The horizontal axis is the r parameter, the vertical axis is the x variable. The image was created by forming a 1601 x 1001 array representing increments of 0.001 in r and x. A starting value of x=0.25 was used, and the map was iterated 1000 times in order to stabilize the values of x. 100,000 x -values were then calculated for each value of r and for each x value, the corresponding (x,r) pixel in the image was incremented by one. All values in a column (corresponding to a particular value of r) were then multiplied by the number of non-zero pixels in that column, in order to even out the intensities. Values above 250,000 were set to 250,000, and then the entire image was normalized to 0-255. Finally, pixels for values of r below 3.57 were darkened to increase visibility.

Licensing

(4) Geht man von diskreten Iterationen zu kontinuierlicher Veränderung über, so bekommt man Differentialgleichungen (DGL).

(Beispiel: $f'(t) = (1+r)\, f(t)$, $f(0) = z_0$

liefert $f(t) = z_0 \cdot e^{(1+r)t}$)

Diese sind oft also eng verwandt mit Rekursionen – und umgekehrt löst man DGL oft, indem man sie durch diskrete Rekursionen annähert.

Zusammengefasst also:

- Nichtlineare Rekursionen können sehr erstaunliche Ergebnisse liefern!

$\rightarrow$ Lineare Rekursionen noch beherrschbar?!

$\hookrightarrow$ Nächster Abschnitt!

5.4.4 Das Master-Theorem

Zurück zu

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k)$$

Aufteilung in Teilprobleme

Kosten der Aufteilung + Zusammenfügung

Wäre gut, allgemeine Lösung zu kennen...

Satz 5.6 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}: 0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

Beweis: Nicht hier (siehe z.B. Cormen, 4.4)

Beispiele:

(a) $U(n) = 8\,U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

(Ausprobieren mit $U(1) = 1$:

$U(3) = 8 + 1 = 9$

$U(9) = 8 \cdot 9 + 81 = 17 \cdot 9 = 153$

$U(27) = 8 \cdot 153 + 27^2 < 2 \cdot 27^2$)

Im Master-Theorem:

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_8 = \frac{1}{3}$, $m = 8$, $k = 2$

$\sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$,

also erster Fall:

$U(n) = \Theta(n^2)$

(b) $V(n) = 9 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Ausprobieren mit $V(1) = 1$:

$$V(1) = 1 = 1 \cdot 3^0$$

$$V(3) = 9 \cdot 1 + 3^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^2$$

$$V(9) = 9 \cdot (2 \cdot 3^2) + 9^2 = 3 \cdot 3^4 = 3 \cdot 9^2$$

$$V(27) = 9 \cdot (3 \cdot 3^4) + 27^2 = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 27^2$$

usw.!

Im Master-Theorem:

$$\alpha_1 = \dots \alpha_9 = \frac{1}{3}, \quad m = 9, \quad k = 2$$

$$\sum_{i=1}^{9} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1,$$

also zweiter Fall:

$$V(n) = \Theta(n^2 \log n)$$

(c) $W(n) = 10 \cdot W(\frac{n}{3}) + n^2$

Ausprobieren:

$W(1) = 1$

$W(3) = 10 + 9 = 19$

$W(9) = 190 + 81 = 271$

$W(27) = 2710 + 729 = 3439$

Wächst noch schneller!

Im Master-Theorem:

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{10} = \frac{1}{3}$, $m = 10$, $k = 2$

$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 1$

Gesucht also c mit $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i^c = 1$,

d.h. $10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c = 1$,

also $\left(\frac{1}{3}\right)^c = \frac{1}{10}$, oder $c = \log_3 10 \approx 2{,}096$

Liefert

$W(n) = \Theta\left(n^{2{,}096\ldots}\right)$!