8

31.10.2007

1.3 Ausblick

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit verschiedensten Aspekten von Algorithmen beschäftigen. Dazu gehören oft auch ~~die~~ Analyse und Verständnis der zugrundeliegenden mathematischen Strukturen. Gerade letzteres macht oft den eigentlichen Witz aus!

Dieses Verständnis ist wichtig, um

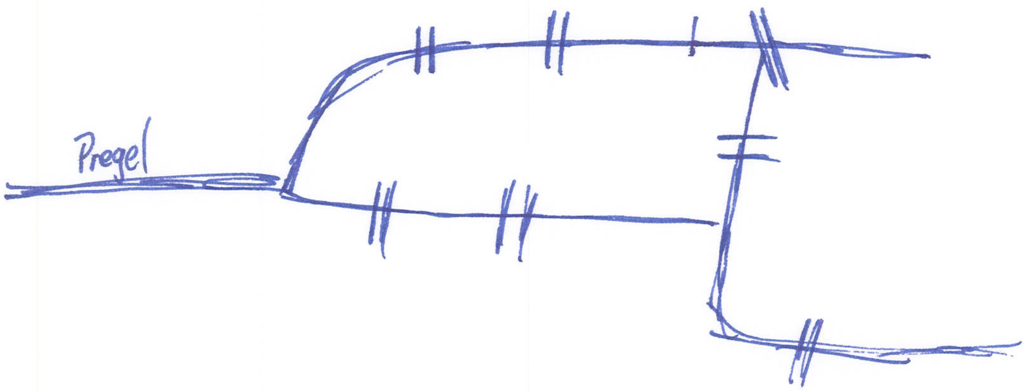
- ein Gefühl für die Besonderheiten eines Problems zu bekommen.
- ein Gefühl für das Funktionieren einer Lösungsmethode zu bekommen.
- eine Lösungsmethode zu entwickeln
- zu zeigen, dass eine Lösung korrekt ist
- zu zeigen, dass eine Lösungsmethode korrekt ist
- zu zeigen, dass es keine Lösung gibt.
- zu zeigen, dass es keine Lösungsmethode gibt
- SPASS DABEI ZU HABEN !

2 Graphen

2.1 Historie

Erste wissenschaftliche Arbeit über Graphen:

1735 in Königsberg



Gegeben:

1 Fluss, 2 Ufer, 2 Inseln, 7 Brücken

Aufgabe:

„Über 7 Brücken musst du gehn…"

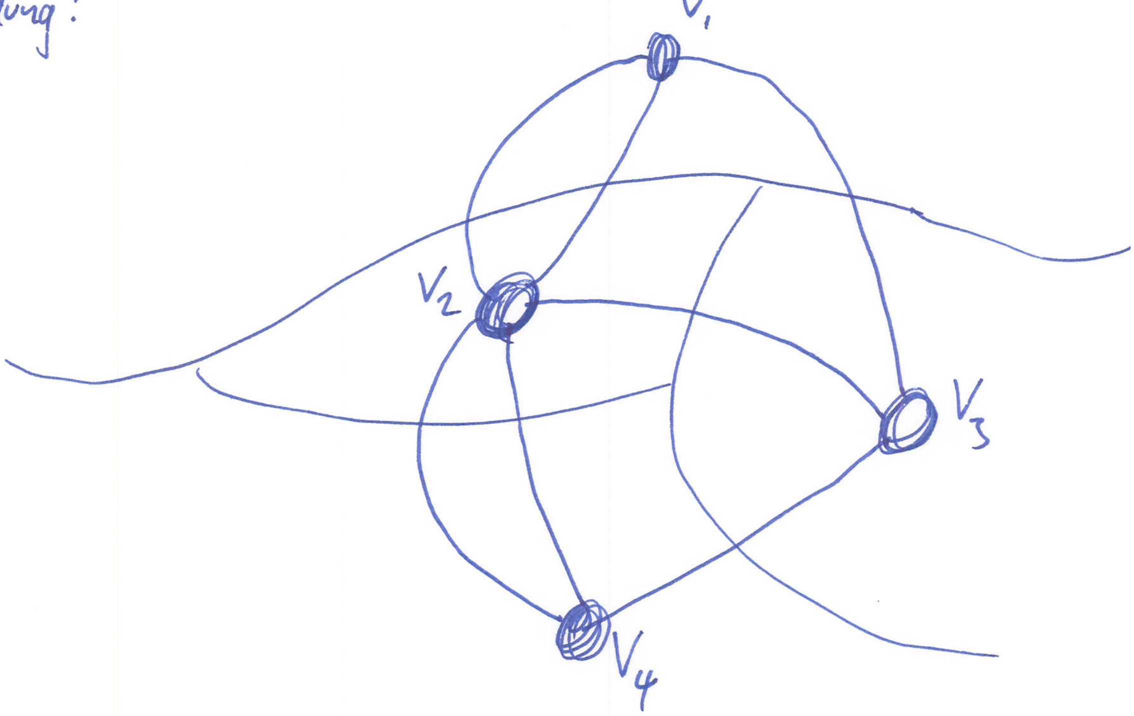
Genauer:
Problem [illegible] 2.1 (Eulerpfad)

Gegeben: 7 Brücken

Gesucht: Ein Weg, der (trockenen Fußes!) alle Brücken genau einmal überquert.

Auflösung: Es gibt keinen solchen Weg!

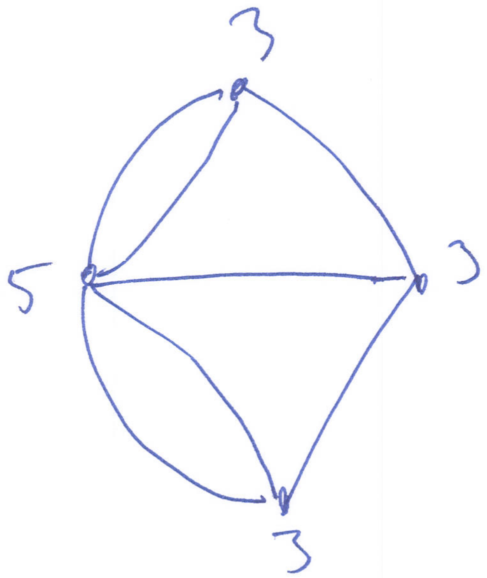
Begründung:



Bei jeder Benutzung einer Brücke wechselt man von einem Gebiet in ein anderes.

~~Wenn man ein Gebiet wieder verl~~

Wenn man einen Weg betrachtet, der in einem Gebiet v_a beginnt und in einem Gebiet v_e endet, dann gilt ~~es~~ für die anderen beiden Gebiete v_i und v_j, dass sie genauso oft betreten wie verlassen werden; also muss es mindestens zwei Gebiete geben, die jeweils eine gerade Anzahl von Brücken aufweisen.



Das ist hier nicht der Fall, also gibt es keinen solchen Weg! □

Leonhard Euler (* 15.4.1707 in Basel
+ 18.9.1783 in St. Petersburg)

13	1720	Studienbeginn in Basel
16	1723	Magister
20	1727	Berufung an Petersburger Akademie
24	1731	Professor für Physik

(Heute nicht mehr möglich?

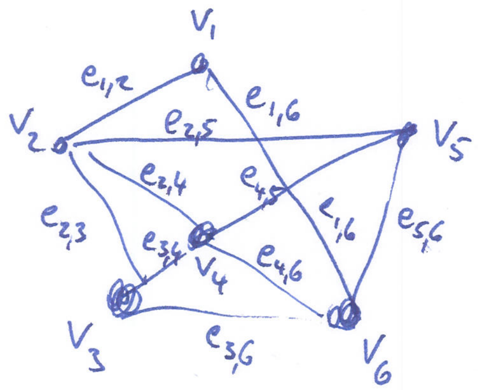
Erik Demaine * 28.2.1981 in Halifax, Kanada

12	1993	Studienbeginn in Kanada
14	1995	Bachelor
15	1996	Master
20	2001	Doktor
20	2001	Assistenzprofessor am MIT
24	2005	Professor am MIT

Arbeitsgebiet: Algorithmik ...)

Euler hat eine Instanz betrachtet, aber dann gleich ein Problem untersucht & – und dabei ein neues Gebiet begonnen: die Graphentheorie.

Definition 2.2 (Graphen)



Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}, e_{1,6},$
$e_{2,3}, e_{2,4}, e_{2,5}$
$e_{3,4}, e_{3,6}$
$e_{4,5}, e_{4,6}$
$e_{5,6}$

Bezeichnungen:

Knotenmenge V ("vertices")

Kantenmenge E ("edges")

~~(i) Ein Graph G ist:~~

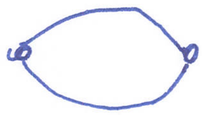
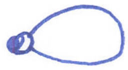
Schreibweise:

$$G = (V, E)$$

Für alle Kanten gilt: e hat zwei Elemente

Mathematisch: $\forall\, e \in E \subseteq 2^V : |e| = 2$

Unter Umständen auch möglich:

- Parallele Kanten  → Euler!
- Schleifen 

Jetzt formaler:

(1) (i) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ), für das

(a) V und E endliche Mengen sind

(b) $\Psi : E \to \{ X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2 \}$

Kardinalität von X!

(Also: Jede Kante enthält einen oder zwei Knoten)

↓ Schleifen

(ii) V ist die Knotenmenge

(iii) E ist die Kantenmenge

(2) (i) Zwei Kanten e und e' sind parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.

(ii) e ist eine Schleife, wenn $|\Psi(e)| = 1$ ist

(iii) Ein Graph ohne parallele Kanten und ohne Schleifen heißt „einfach" und man schreibt auch einfach (!) $G = (V, E)$; $E(G)$ ist die Kantenmenge von G.

(iv) In einem einfachen Graphen kann man $\{v_i, v_j\}$ für eine Kante $e_{i,j}$ zwischen v_i und v_j schreiben

(v) $|E|$ ist die Anzahl der Kanten von G.

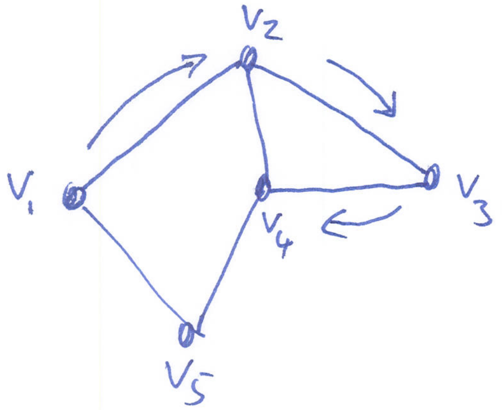
(vi) Oft verwendet man den Buchstaben

n für $|V|$, die Anzahl der Knoten

m für $|E|$, die Anzahl der Kanten.

$\square$

Jetzt wollen wir uns Gedanken machen um die Art und Weise, wie man in einem Graphen umherwandern kann!



Laufe von v_1 nach v_2 nach v_3 nach v_4 !