$$\underbrace{c}_{2} \cdot n \cdot \underbrace{\log n}_{=1} = 2 \cdot c \geq 2 \cdot (g + d)$$

wähle $c \geq g + d$. (Beachte, dieses impliziert $c \geq d$)

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gilt für $k = \frac{n}{2}$, d.h.

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}$$

Induktionsschritt: $\frac{n}{2} \rightsquigarrow n$

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + d \cdot n$$

$$\leq 2 \cdot \left(c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + d \cdot n$$

$$= c \cdot n \cdot \log \frac{n}{2} + d \cdot n$$

$$= c \cdot n \log n \underbrace{- cn + d \cdot n}_{\leq 0, \text{ da } c \geq d}$$

$$\leq c \cdot n \log n$$

$$\Rightarrow \quad T(n) \in O(n \log n)$$

5.4 Rekursionen

In diesem Kapitel werden verschiedene Methoden zum Lösen von Rekursionsgleichungen vorgestellt.

Methode 1: Substitutionsmethode

1. Rate eine Lösung
2. Verwende vollständige Induktion um zu zeigen, dass die Lösung richtig ist.

↳ Diese Methode haben wir im Beweis zu Satz 5.2 angewendet.

Probleme:

- Klar, Schritt 1.
  (Man könnte versuchen $T(n)$ einzugrenzen z.B. zunächst $O(n) \leq T(n) \leq O(n^2)$ zeigen)
- Trotzdem, die Methode wird nicht immer durchführbar sein.

Allgemeiner ist:

Methode 2: Erzeugenden Funktionen

Definition 5.5

Sei $a(n)$ eine Zahlenfolge $(n = 0, 1, 2, \dots ; a_n \in \mathbb{R})$.

Dann heißt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

gewöhnliche erzeugende Funktion von a_n.

Beispiele

(1) $a_n = 2 a_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$a_0 = 1$

gew. erz. Fkt:

$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \dots \qquad f(x) = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + \dots\dots$

Wir suchen eine „geschlossene Form" für a_n,

d.h. eine Darstellg ohne a_k mit $k \leq n-1$

Die gew. erzeugende Funktion zu a_n lautet:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$= a_0 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_{n-1} \cdot x^n$$

$$= a_0 + 2 \cdot x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

$$= a_0 + 2 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{= f(x)}$$

$$= a_0 + 2 \cdot x \cdot f(x)$$

Auflösen nach $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + 2 \cdot x \cdot f(x)$$

$$f(x)(1-2x) \underset{\substack{\uparrow \\ a_0 = 1}}{=} 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

Das kann man auch als Reihe schreiben, wenn man $\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$ nutzt.

(Beachte, das gilt nur für $|p| < 1$, im Beispiel hieße das $|2x| < 1$, so ein x existiert!)

Deshalb:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

Aber auch:

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n} = f(x) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n}$$

$$\Leftrightarrow a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_k \cdot x^k + \ldots = 2^0 \cdot x^0 + 2^1 \cdot x^1 + 2^2 \cdot x^2 + \ldots + 2^k \cdot x^k + \ldots$$

Damit Gleichheit gilt, müssen die Koeffizienten vor der jeweiligen Potenz von x gleich sein, d.h.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2^0 \\ a_1 &= 2^1 \\ a_2 &= 2^2 \\ &\vdots \\ a_k &= 2^k \end{aligned}\right\}$$

allgemein: $a_n = 2^n$

d.h. wir haben einen geschlossenen Ausdruck für a_n gefunden!

„Koeffizientenvergleich"

(2) $T(n) = a_n = a_{\frac{n}{2}} \cdot 2 + c \cdot n \ , \quad a_1 = 1$

für $n = 2^m$ (Laufzeit von Mergesort),

d.h. wir betrachten die Folge $(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_1, a_2, a_4, a_8, \ldots)$

Die gewöhnliche erzeugende Funktion lautet:

$$f_b(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{a_{2^m}}_{=b_m} \cdot x^m = a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2^m} \cdot x^m$$

$$= a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(2 \cdot a_{2^{m-1}} + c \cdot 2^m\right) \cdot x^m$$

$$= 1 + 2 \cdot x \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_{2^{m-1}} \cdot x^{m-1} + c \cdot \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot x^m$$

$$= 1 + 2 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_{2^m} \cdot x^m}_{f_b(x)} + c \cdot \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (2x)^m}_{= \frac{1}{1-2x}} - \underbrace{(2x)^0}_{=1} \right)$$

$$= 1 + 2 \cdot x \cdot f_b(x) + c \cdot \left(\frac{1}{1-2x} - 1 \right)$$

Nach $f_b(x)$ auflösen:

$$f_b(x) = \frac{1}{1-2x} + c \cdot \left(\frac{1}{(1-2x)^2} - \frac{1}{1-2x} \right)$$

$$= \frac{1-2x}{(1-2x)^2} + \frac{c}{(1-2x)^2} - \frac{c \cdot (1-2x)}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{1-2x+c-c+2x\cdot c}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{1+2x\cdot(c-1)}{(1-2x)^2}$$

Diesen Ausdruck kann man wieder in eine Reihe entwickeln und zeigen:

$$a_{2^m} \approx 2^m \cdot m$$

da $n = 2^m \Leftrightarrow m = \log_2 n$

folgt: $a_n \approx n \cdot \log_2 n$

(wohl gemerkt, der Schluß ist nur eine grobe Skizze für den Beweis)

Erzeugende Funktionen sind sehr hilfreich, aber wir kehren nun zurück zu Sortieralgorithmen: