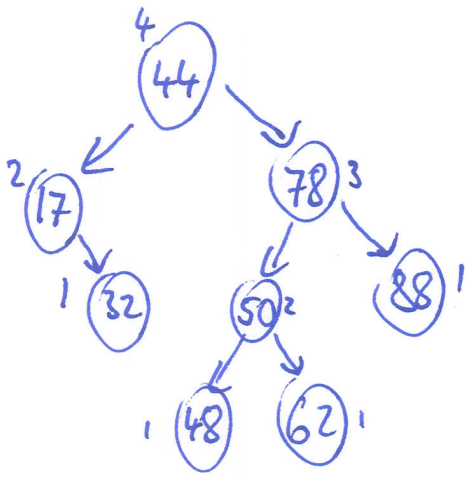
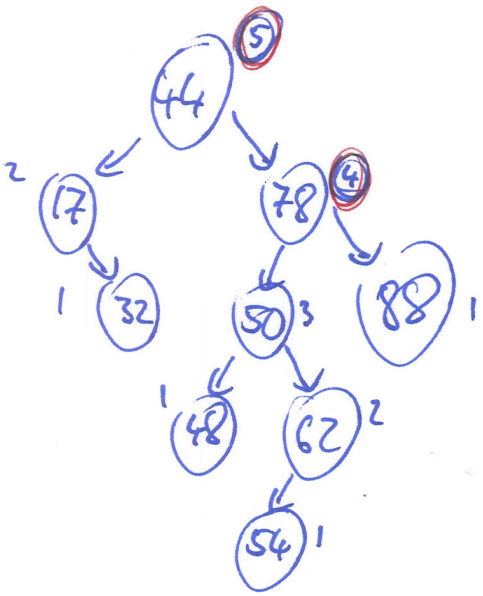
19.12.07

Idee 5: Beim Einfügen oder Löschen ändert sich die Eigenschaft nur lokal und nur ein bisschen → nimm begrenzte lokale Änderungen zur Reparatur vor!

Beispiel:



Füge 54 ein!

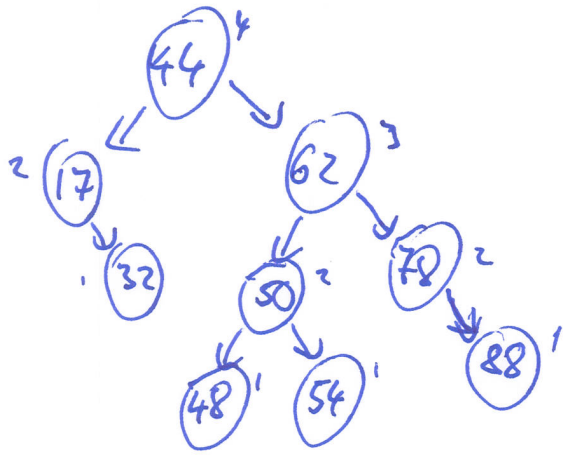


Was ist zu tun?

- Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert
- Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter 44 höhenbalanciert ist

→ Lokal. Betrachte (78), Kind (50), Enkelkind (62)
(Kritischer Pfad unter (78))

Neuer Baum:



- höhenbalanciert!
- nur lokale Umsortierung von (78), (62), (50)

Vorher: 78 oben, darunter 50, 62
Jetzt: 62 oben, darunter 78, 50

↳ Rotation!

Mehr Details und Fallbetrachtung folgen...

Genauer: Betrachte Einfügen eines Knotens v:

(Im Beispiel: 54)

Wenn Baum weiter höhenbalanciert → Ok!

Wenn Baum nicht mehr höhenbalanciert

→ Vorfahre von v hat Gewicht dazubekommen, was zu Unbalanciertheit geführt hat

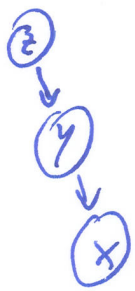
(Im Beispiel sind das 44 und 78)

Sei z der niedrigste unbalanciente Vorfahre von v (Im Beispiel: 78) → Mindestens Höhe 3

Sei y das Kind von z, das Vorfahre von v ist (im Beispiel: 50);
dann muss y zwei höher sein als das andere Kind von z.

Sei x das Kind von y, das im Teilbaum von v liegt.
(im Beispiel: 62)

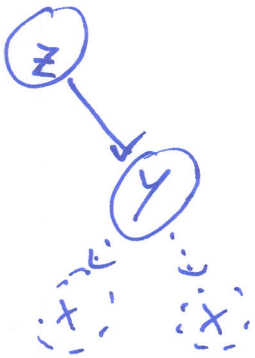
Also: Großvater z
Vater y
Kind x
(eventuell auch x = v möglich)



Wie können x, y, z zueinander stehen?

Beobachtung:

Wenn $z < y$,

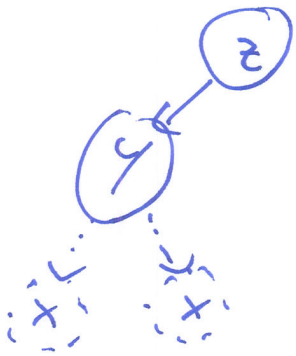


dann auch $z < x$

(Suchbaumeigenschaft!)

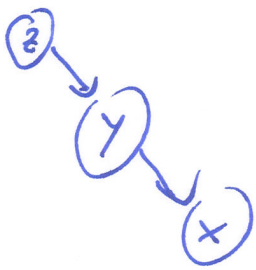
Wenn $z > y$,

dann auch $z > x$

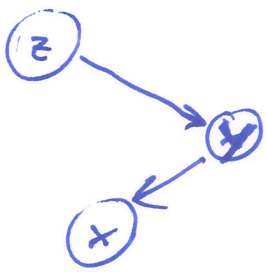


Es bleiben die Möglichkeiten:

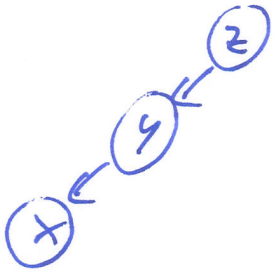
(I) $z < y < x$



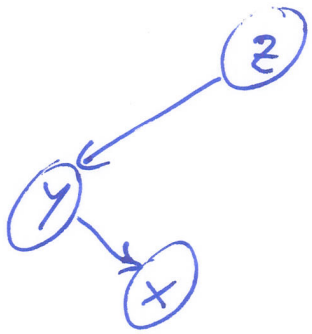
(II) $z < x < y$



(III) $x < y < z$

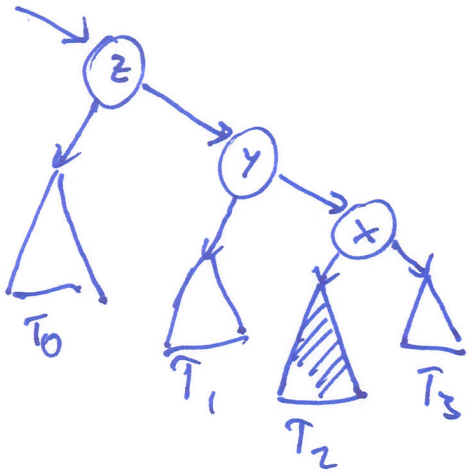


(IV) $y < x < z$

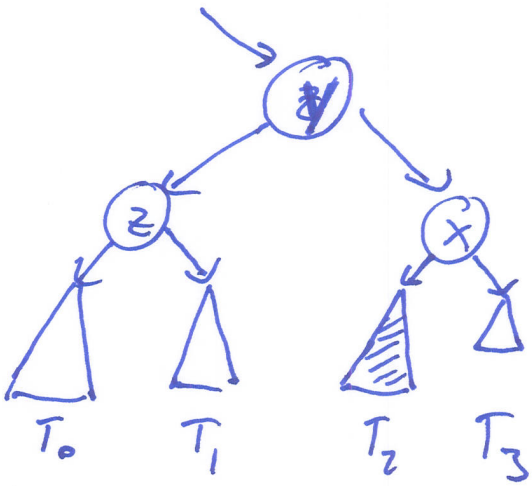


Jetzt betrachten wir folgende Reparaturoperationen:

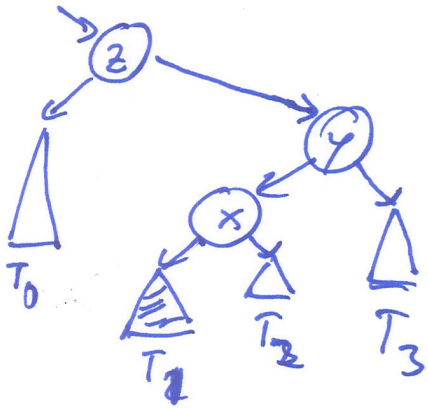
(I)



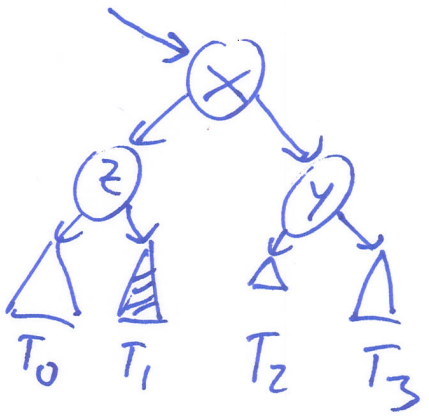
T_2 enthält v, geht zwei Level tiefer als T_0, ein Level tiefer als T_1, T_3



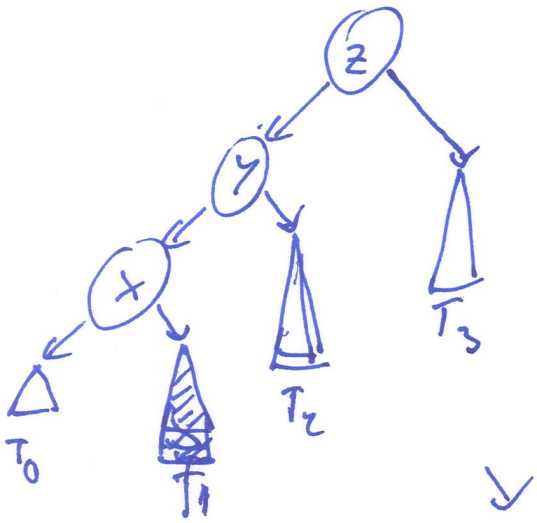
(II)



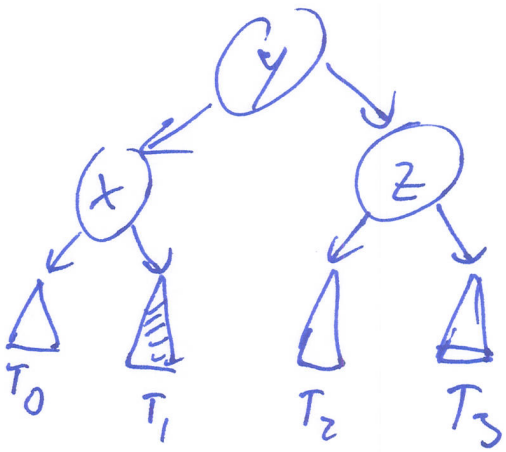
(T_1 zwei Level tiefer als T_0!)



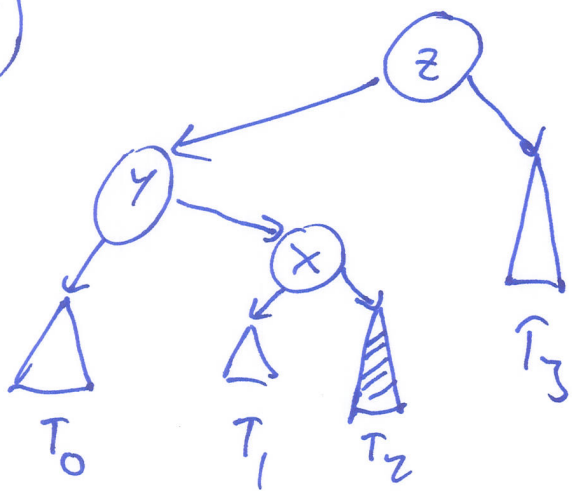
(III)



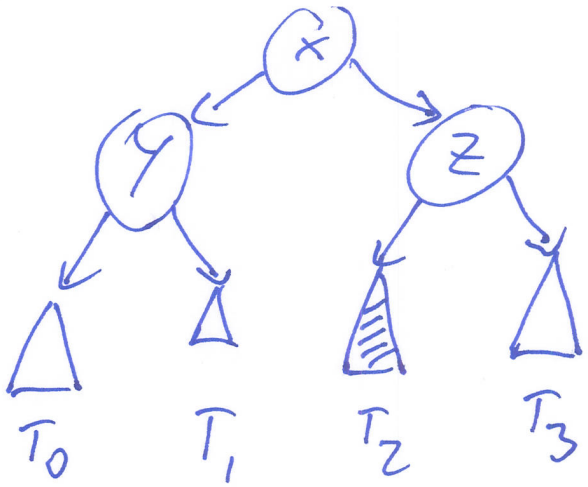
(T_1 zwei Level tiefer als T_3, eins tiefer als T_0, T_2)



(IV)

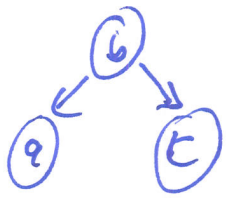


(T_2 zwei Level tiefer als T_3, eins tiefer als T_0, T_1)



Gemeinsames Muster:

$a < b < c$ wird zu



!

(Vgl. Fälle!)

Also:

Algorithmus 4.8 (Umstrukturierung im Binärbaum)

Restructure (x)

Eingabe: Knoten x eines binären Suchbaumes T, Vaterknoten y, Großvaterknoten z

Ausgabe: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z.

1 Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z;
sei (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z, die nicht Wurzeln x, y, z haben.

2 Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b.

3 Setze a als linkes Kind von b, T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a.

4 Setze c als rechtes Kind von b und T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum von C.

Satz 4.9

Betrachte einen AVL-Baum T. Wird T durch Einfügen eines Knotens v unbalanciert, so ist T nach Aufruf von Restructure(x) wieder höhenbalanciert.

Beweis:

Siehe Fallunterscheidung; beachte, dass die Tiefen von T_0, T_1, T_2, T_3 sich nur um eins unterscheiden können, da T vor Einfügen von v höhenbalanciert war.

Satz 4.10

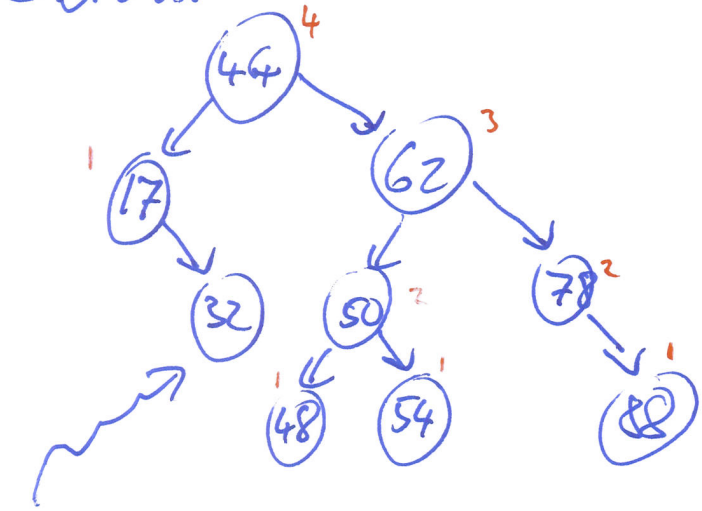
Einfügen in einen AVL-Baum kann man (unter Bewahrung der Höhenbalanciertheit) in $O(\log n)$

Beweis:

„Normales" Einfügen geht in $O(h)$, also $O(\log n)$;
Restrukturieren geht in $O(1)$.

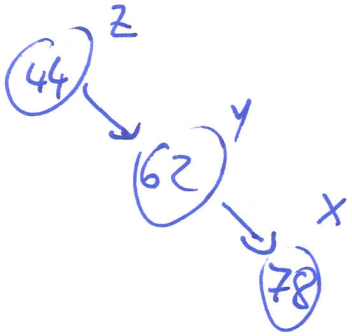
~~Einfügen:~~

Löschen:

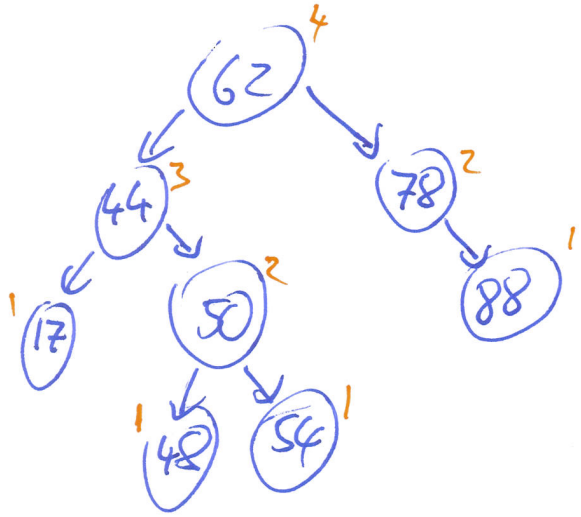


Löschen macht Baum unbalanciert!

Neu:



also



→ höhenbalanciert!

Ähnliche Idee:

Lösche ~~Entferne~~ v

Sei z der erste ~~unbalancierte~~ Knoten auf dem Weg von v zur Wurzel, der nach Entfernung von v unbalanciert wird.

Sei y das Kind von z mit größerer Höhe (offenbar kein Vorfahre von v).

Sei x ein Kind von y mit größter Höhe. (Ggf. Unentschieden, dann Wahl egal!)

Dann Restructure(x)

Problem: Höhe des Teilbaums von b kann sich reduzieren → Vorfahre von b kann unbalanciert werden.

Idee: Immer wieder Restructure auf dem Weg zur Wurzel, bis nicht mehr notwendig!

Satz 4.4

Löschen in einem AVL-Baum lässt sich (unter Bewahrung der Höhenbalanciertheit in $O(\log n)$).