

Problem "Set Cover"

$$P(u) := \{S \mid S \subseteq u\}$$

"Potenzmenge"

Gegeben: $U = \{1, \dots, n\}$ und $\mathcal{F} \subseteq P(U)$, sowie $k \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert $C \subseteq \mathcal{F}$ mit $|C| \leq k$ und

$$\bigcup_{C \in C} C = U?$$

Bsp

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$$

$$k = 2$$

$$\Rightarrow C = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

Zeige: Set Cover ist NP-vollständig

"Membership"

Zertifikat: $\{0, 1\}^{|F|}$ (welche Mengen sind ausgewählt)

Für ein Zertifikat prüfen wir:

1. Anzahl der ist $\leq k$
2. Liste alle Elemente aller $f_i \in \mathcal{F}$ auf, für welche an i -ter Stelle im Zertifikat eine 1 steht.
3. Prüfe, ob jedes Element $u \in U$ in der Liste existiert.

Laufzeit

Die Liste beinhaltet $O(k \cdot n) \subset O(\text{Liste}) \subset O(|F| \cdot n)$ viele Elemente. Damit kann Schritt 3 in Zeit $O(|F| \cdot n^2)$ Zeit erfolgen. Das ist polynomiell im Input!

Bemerkung: In einer kompakter Codierung von U und F ist U nur eine Zahl mit $\log n$ bits und F eine Menge von Binärstrings $\{0,1\}^n$ oder eine Menge von Binärstringmengen $\{\{0,1\}^{\log n}\}$, um die Potenzmenge zu beschreiben. Da jedes Element ^{von U} in einer Menge von F codiert sein muss, ist die Codierungsgröße von F also mind. n .

Korrektheit

Ex. Set Cover C der Größe k , dann setze Stelle i des Zertifikats auf 1, gdw $S_i \in C$.

$\Rightarrow$ Zertifikat hat $\leq k$ 1en, und die Überprüfung muss auch gelingen.

Andererseits, gelingt die Überprüfung für ein Zertifikat, dann ist dies nach Konstruktion auch ein Set Cover.

Geg.: Graph $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$

Frage: $\exists VC \subseteq V: \forall \{u,v\} \in E: u \in VC \vee v \in VC$

"Hardness"

Zeige: Vertex Cover $\leq_m^{\text{poly}}$ Set Cover

Man sieht schnell: E entspricht dem Universum U ,
die Kanten an einem Knoten v entspricht $\{u,v\} \in E$ einer Menge in $\mathcal{F}$.

Sei $I(v) = \{\{u,v\} \in E\}$

Dann ist $\mathcal{F} = \{I(v) \mid v \in V\}$ und $U = E$

Diese Reduktion lässt sich in poly-Zeit durchführen:

U ist schon berechnet (gib einfach E raus). $\mathcal{F}$ zu berechnen
dauert $O(n)$ Zeit pro Knoten, also $O(n^2)$ maximal insgesamt.

Claim

G hat VC der Größe $\leq k$, gdw Set-Cover-Instanz $(U, \mathcal{F})$
ein Set Cover der Größe $\leq k$.

" $\Rightarrow$ " Sei VC ein Vertex Cover der Größe k , mit Knoten $\{v_1, \dots, v_k\}$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^k I(v_i) = E$

$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i = U \Rightarrow \exists$ Set Cover der Größe $\leq k$

" $\Leftarrow$ " Analog von unten nach oben, dass es ~~Äquivalenz~~ Äquivalenzaussagen
sind.

Problem "Linear Inequalities" (LI)

Gegeben: $n \times d$ Matrix A , n -vector $b \in \mathbb{Z}^n$
 $\in \mathbb{Z}^{n \times d}$

Frage: $\exists x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d: Ax \leq b$

Man kann zeigen $LI \in P$

Wir skizzieren Hardness:

$CVP \leq_m^{\log} LI$:

Wir müssen aus den Zuweisungen P_i in CVP Bedingungen der Form $Ax \leq b$ für LI erzeugen

Dazu: Für jede Zuweisung P_i erzeugen wir eine Variable x_i mit $0 \leq x_i \leq 1$

Betrachte nun verschiedene Zuweisungen:

$$P_i = 0 \Rightarrow x_i \leq 0$$

$$P_i = 1 \Rightarrow x_i \geq 1 \Leftrightarrow -x_i \leq -1$$

$$P_i = \neg P_s \Rightarrow x_i = 1 - x_s$$

$$P_i = P_s \wedge P_t \Rightarrow x_i \leq x_s, x_i \leq x_t, x_i \geq x_s + x_t - 1$$

$$P_i = P_s \vee P_t \Rightarrow x_i \geq x_s, x_i \geq x_t, x_i \leq x_s + x_t$$

Man kann schnell verifizieren, dass alle $x_i \in \{0, 1\}$. Als letzte Bedingung können wir $x_d = 1$ erzeugen.

Damit:

CVP gibt 1 heraus $\Leftrightarrow$ LI-Instanz hat eine Lösung.
Beweis: selbst!