



Technische
Universität
Braunschweig



Theoretische Informatik 2

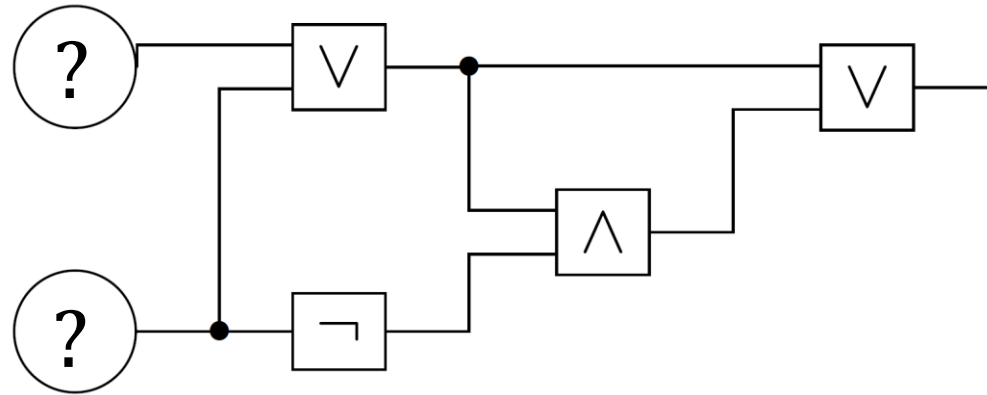
Arne Schmidt

Nächstes Kapitel



Kapitel 11 – Die Klasse NP

Eine „Variante“ des CVP



Wir schwer ist es zu entscheiden, ob man die „?“ so mit 0 und 1 Belegen kann, damit am Ende der Wert 1 herauskommt?

Kapitel 11.1 – NP-Vollständigkeit von SAT

CircuitSAT

CircuitSAT

Definition 11.1

Ein Boolescher Schaltkreis **mit variablen Eingängen** ist ein Boolescher Schaltkreis wie in Definition 10.3, in welchen Zuweisungen der Form $P_i = ?$ erlaubt sind.

P_i , deren Zuweisung der Form $P_i = ?$ entsprechen, heißen Variable Eingänge des Circuits.

Für einen Schaltkreis C mit variablen Eingängen $y_1, \dots, y_k \in \{0,1\}$ schreiben wir $C(y_1, \dots, y_k)$ für den Wahrheitswert von C mit der Belegung $P_1 = y_1, \dots, P_k = y_k$.

Erfüllbarkeitsproblem für Schaltkreise (CircuitSAT)

Gegeben: Ein Boolescher Schaltkreis C mit variablen Eingängen P_1, \dots, P_k .

Frage: Gibt es Wahrheitswerte $y_1, \dots, y_k \in \{0,1\}$ mit $C(y_1, \dots, y_k) = 1$?

CircuitSAT ist NP-vollständig

Theorem 11.2

CircuitSAT ist NP-vollständig (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Lemma 11.4 „Membership“

CircuitSAT liegt in NP.

Beweis: Betrachte die Instanz von CircuitSAT als CVP-Instanz, indem eine Belegung y_1, \dots, y_k geraten wird. Das dauert nur $O(k)$ Zeit.

Die resultierende Instanz zu überprüfen, benötigt $O(n^2)$ Zeit für n Zuweisungen, ist also polynomiell.

Gibt es eine erfüllende Belegung, dann kann diese auch geraten werden und wird überprüft. Gibt es keine erfüllende Belegung, kann die CVP-Instanz immer nur ‚falsch‘ zurückgeben.

CircuitSAT ist NP-vollständig

Theorem 11.2

CircuitSAT ist NP-vollständig (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Lemma 11.5 „Hardness“

CircuitSAT ist NP-schwer.



Der Beweis ist sehr ähnlich zum P-schwere-beweis von CVP.

Im Skript sind die Unterschiede hervorgehoben.

SAT

(3)SAT

Erfüllbarkeit von Booleschen Formeln in (k)CNF ((k)SAT)

Gegeben: Eine Boolesche Formel F in CNF (in der jede Klausel maximal k Literale enthält).

Frage: Gibt es eine Belegung φ mit $\varphi(F) = \text{true}$?

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

Theorem 11.6 (Cook 1971, Levin 1973)

SAT ist NP-vollständig.

Theorem 11.8

3SAT ist NP-vollständig.

3SAT ist NP-schwer

Theorem 11.9

CircuitSAT \leq_m^{\log} 3SAT.

Beweis(skizze):

Betrachte folgende Funktion $F(\cdot)$, welche jede Zuweisung $P_i = \dots$ in eine 3-KNF überträgt:

- $P_i = 0$ wird zu $\neg x_i$.
- $P_i = 1$ wird zu x_i .
- $P_i = ?$ wird nicht übersetzt.
- $P_i = \neg P_s$ wird zu $(x_i \vee x_s) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_s)$.
- $P_i = P_s \wedge P_t$ wird zu $(x_i \vee \neg x_s \vee \neg x_t) \wedge (\neg x_i \vee x_s) \wedge (\neg x_i \vee x_t)$.
- $P_i = P_s \vee P_t$ wird zu $(\neg x_i \vee x_s \vee x_t) \wedge (x_i \vee \neg x_s) \wedge (x_i \vee \neg x_t)$.

Dann ist

$$F = x_\ell \wedge \bigwedge_{i=0, \dots, \ell} F(P_i = \dots)$$

Korrektheitsbeweis
zur Übung selbst!

Übung – Hamiltonkreise (Kapitel 11.2)

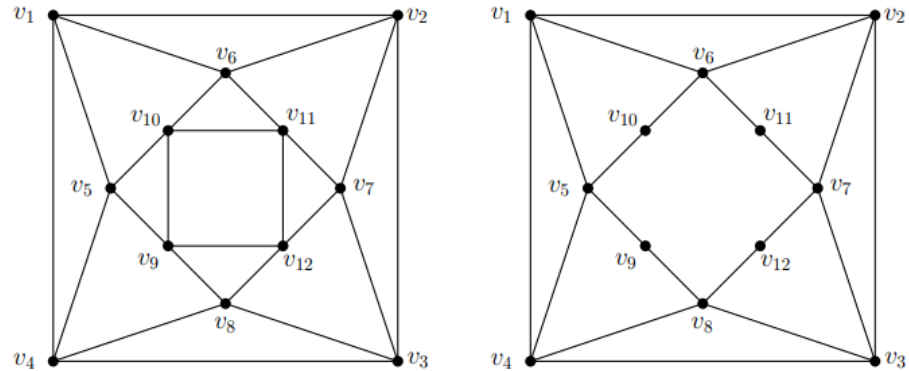
Hamiltonkreise

Definition 11.10

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Ein Hamiltonscher Kreis in G ist ein geschlossener Pfad, der alle Knoten exakt einmal besucht.

Beispiel 11.11

(Verbindungen gehen in beide Richtungen)



Directed Hamiltonian Cycle (DHC)

Gegeben: *Gerichteter* Graph $D = (V, E)$

Frage: Gibt es einen gerichteten Hamiltonkreis in D ?

DHC ist NP-vollständig

Theorem 11.12

DHC ist NP-vollständig (bzgl. Polynomialzeit-Reduktionen).

Bemerkung 11.13:

Wir werden uns hier das Leben einfach halten und eine Polyzeit-Reduktion nutzen.

Sie sind zwar schwächer als logspace-Reduktion, erfüllen aber auch wichtige Eigenschaften:

- Aus $\mathcal{L} \leq_m^{poly} \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}' \in \text{NP}$ folgt $\mathcal{L} \in \text{NP}$.
- Aus $\mathcal{L} \leq_m^{poly} \mathcal{L}'$ und \mathcal{L} ist NP-schwer folgt \mathcal{L}' ist NP-schwer.
- Falls $P \neq \text{NP}$, dann sind alle NP-schweren Probleme nicht in P enthalten.

DHC Membership

Lemma 11.14 „Membership“

DHC \in NP.

Beweis.

- Rate eine Sequenz von Knoten v_1, \dots, v_n der Länge $n = |V|$.
- Überprüfe:
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ und $(v_n, v_1) \in E$.
 - Jeder Knoten kommt exakt einmal vor.
- Schlägt eine Überprüfung fehl, weise ab.

Dieser Algorithmus akzeptiert nur dann, wenn die Sequenz geratener Knoten einen Hamiltonkreis bilden. Dies geht nur, wenn dieser auch existiert.

Zeit: Linearzeit zum Raten, maximal quadratisch für die Überprüfung.

DHC Hardness

Lemma 11.15 „Hardness“
DHC ist NP-schwer.

Beweisidee.

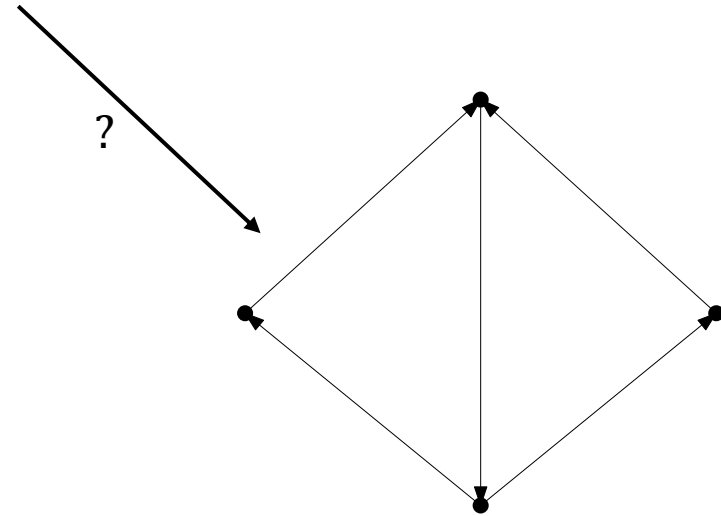
Reduziere 3SAT auf DHC.

Wir benötigen:

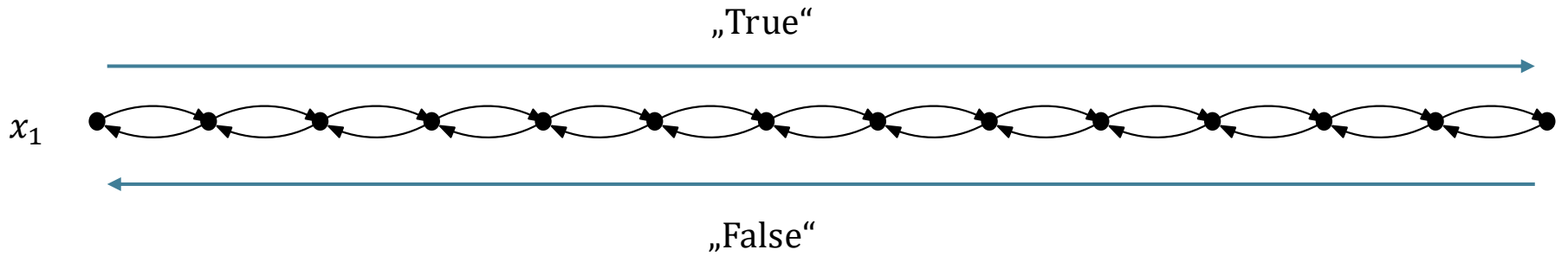
- Ein *Gadget*, um die Variablenbelegung zu simulieren.
- Ein *Gadget*, um die Klauselbelegung zu verifizieren.

Reduktion 3SAT auf DHC

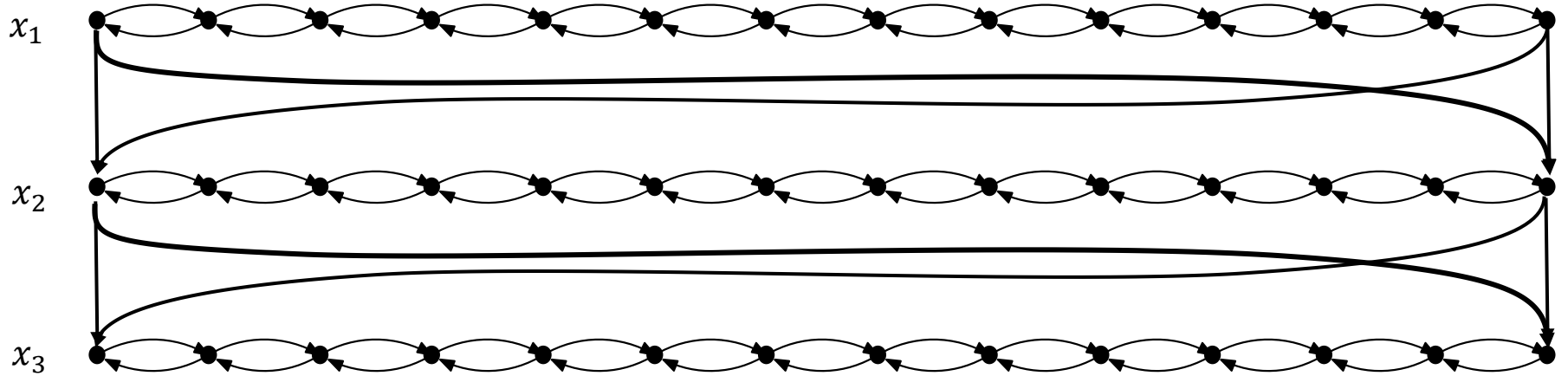
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



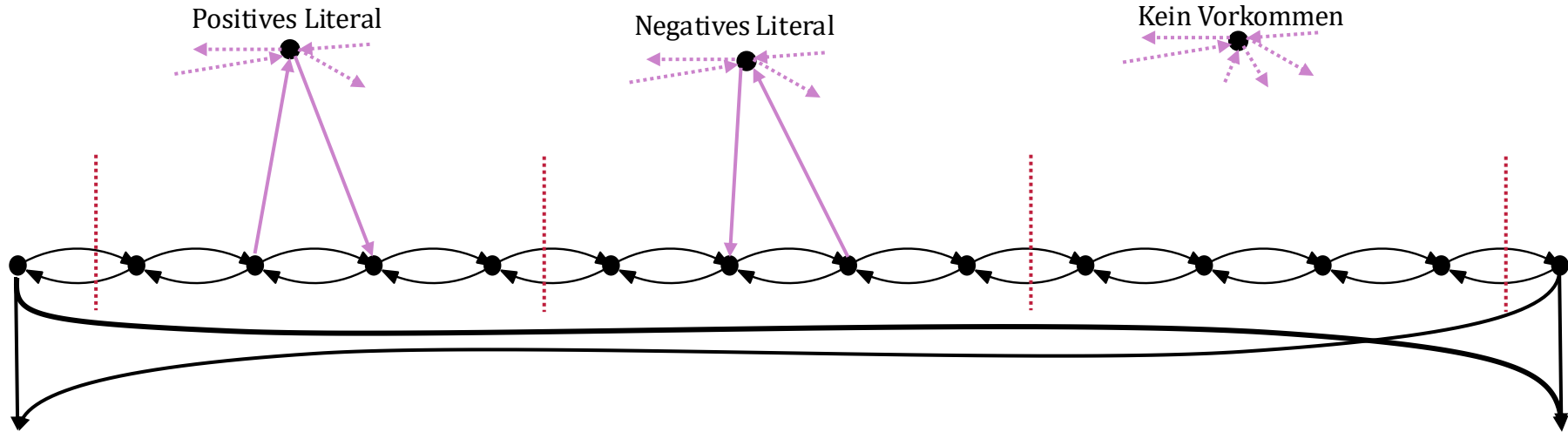
Variablen-Gadgets



Variablen-Gadgets

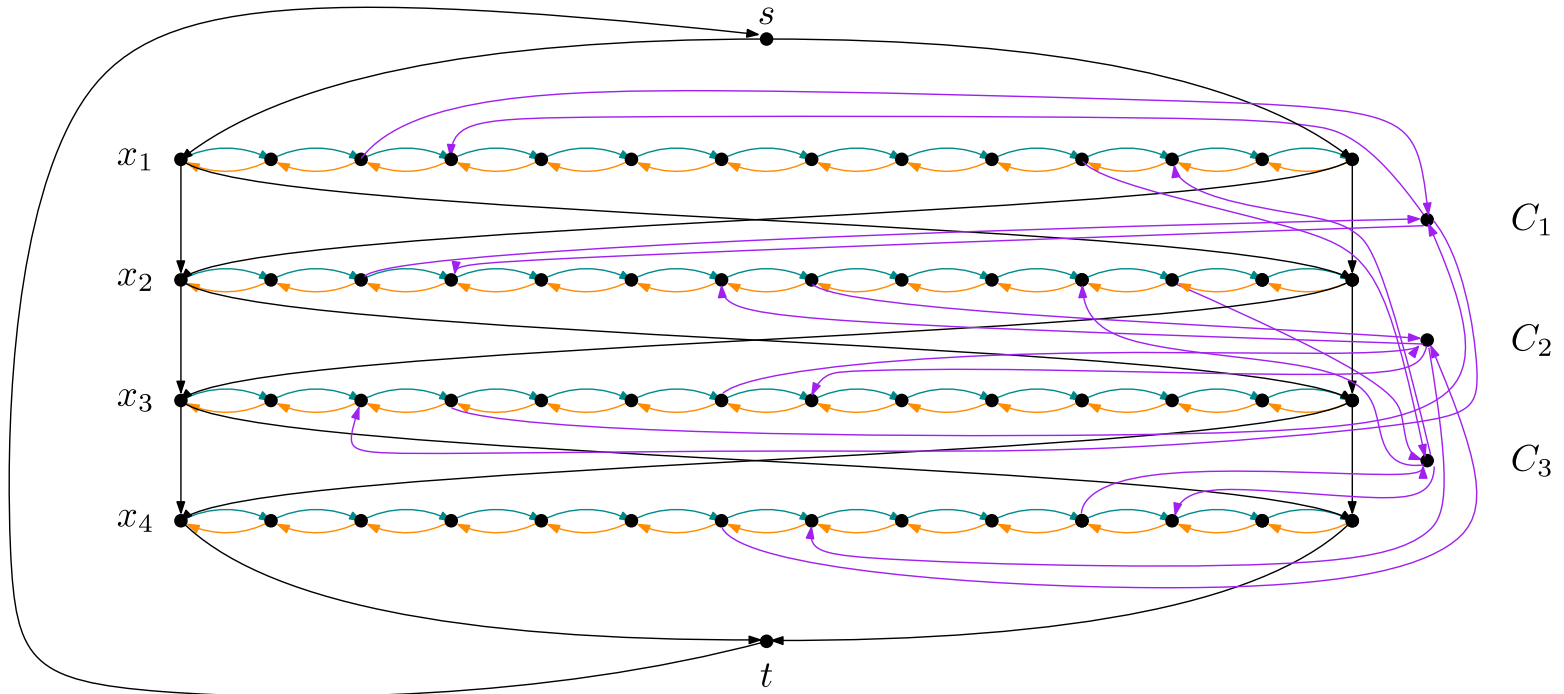


Klausel-Gadgets



Beispiel der Reduktion

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Korrektheit

„Wenn die Formel erfüllbar ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis.“

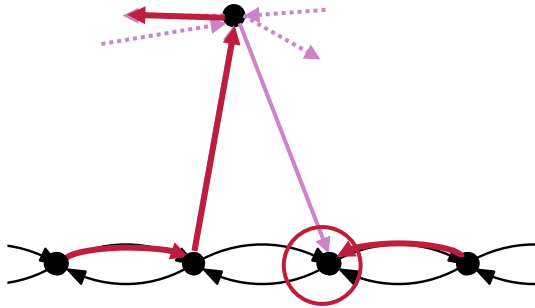
Laufe die Variablen Gadgets in der richtigen Richtung ab und laufe zwischendurch die Klauseln ab. (Nach Konstruktion möglich)

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück.
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde.

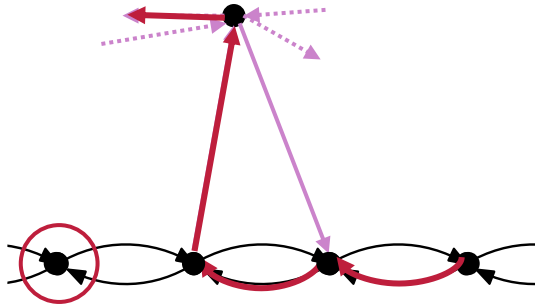
Man muss wieder zurück...



Man kommt nicht mehr weg...

Annahme: Man geht nicht zurück.

Man muss richtig rum laufen...





Man kommt nicht mehr weg...

Annahme: Man läuft Klauseln falsch ab.

Korrektheit

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück. 
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde. 

Also:

1. Variablen-Gadgets werden in einem Zug durchlaufen
 - Die Richtung gibt uns *true* oder *false*
2. Gibt es keine Belegung der Variablen, sodass φ erfüllt wird, so gibt es immer mindestens ein Klausel-Gadget, das nicht abgelaufen werden kann.
 - Es gibt also keinen Hamiltonkreis.

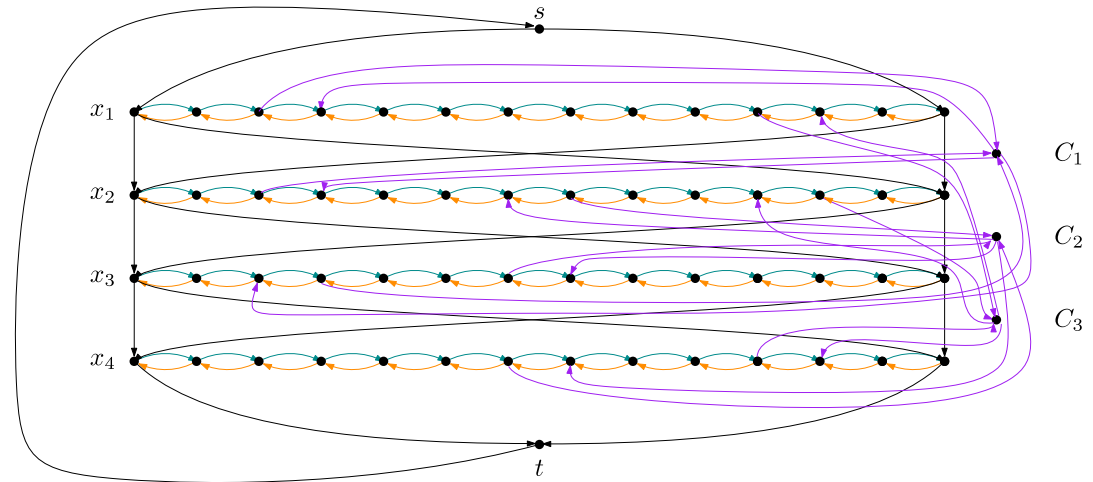
Laufzeit der Transformation

Wir erstellen einen Graphen mit

- $m + O(nm) + 2$ Knoten
- $O(nm)$ vielen Kanten

Wir brauchen also $O(nm)$ Zeit, den Graphen zu erstellen.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Weitere Probleme

(Undirected) Hamiltonian Cycle (HC)

Gegeben: *Ungerichteter* Graph $D = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in D ?

(Integer) Traveling Salesman Problem (TSP)

Gegeben: Graph $D = (V, E)$, Kostenfunktion $c: E \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$, Ganzzahl N

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis $H \subseteq E$ in D , sodass $\sum_{e \in H} c(e) \leq N$?

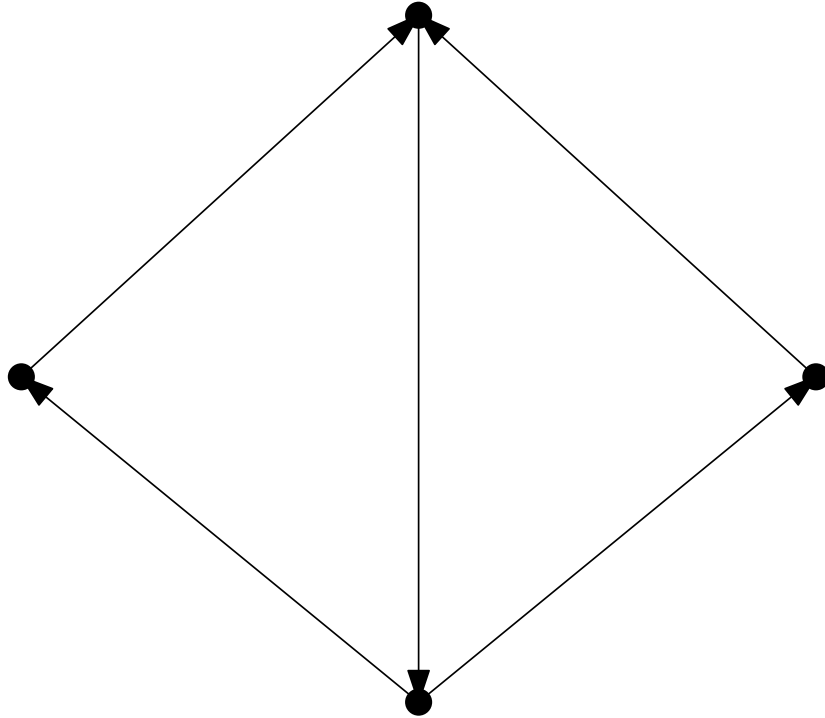
Theorem

HC und TSP sind NP-vollständig.

Den Beweis zur Membership bleibt zur Übung offen. Wir schauen uns die Hardness an.

DHC auf HC

Reduktion von DHC auf HC

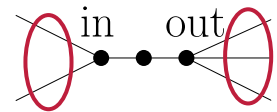
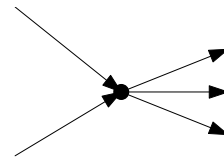


Wie kann man garantieren, dass im ungerichteten Graphen...

...nur eine der ursprünglich *eingehenden* Kanten verwendet wird?

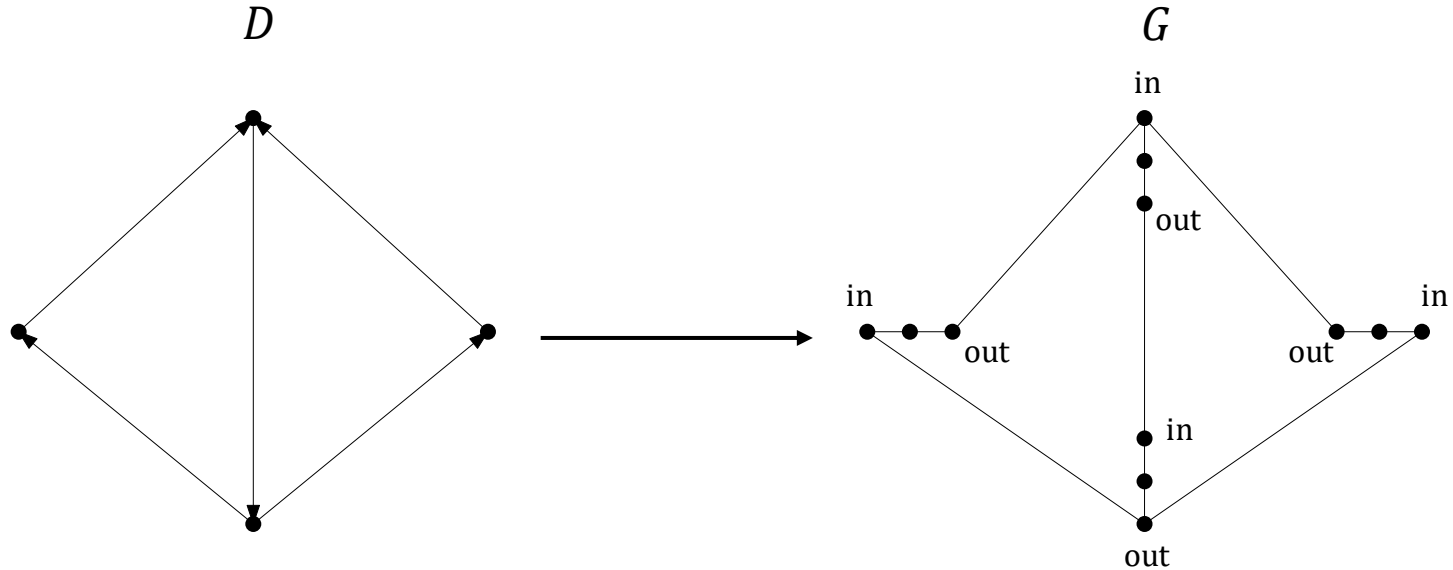
...nur eine der ursprünglich *ausgehenden* Kanten verwendet wird?

Idee: Teile Knoten auf!



Jeweils nur eine möglich!

Reduktion von DHC auf HC

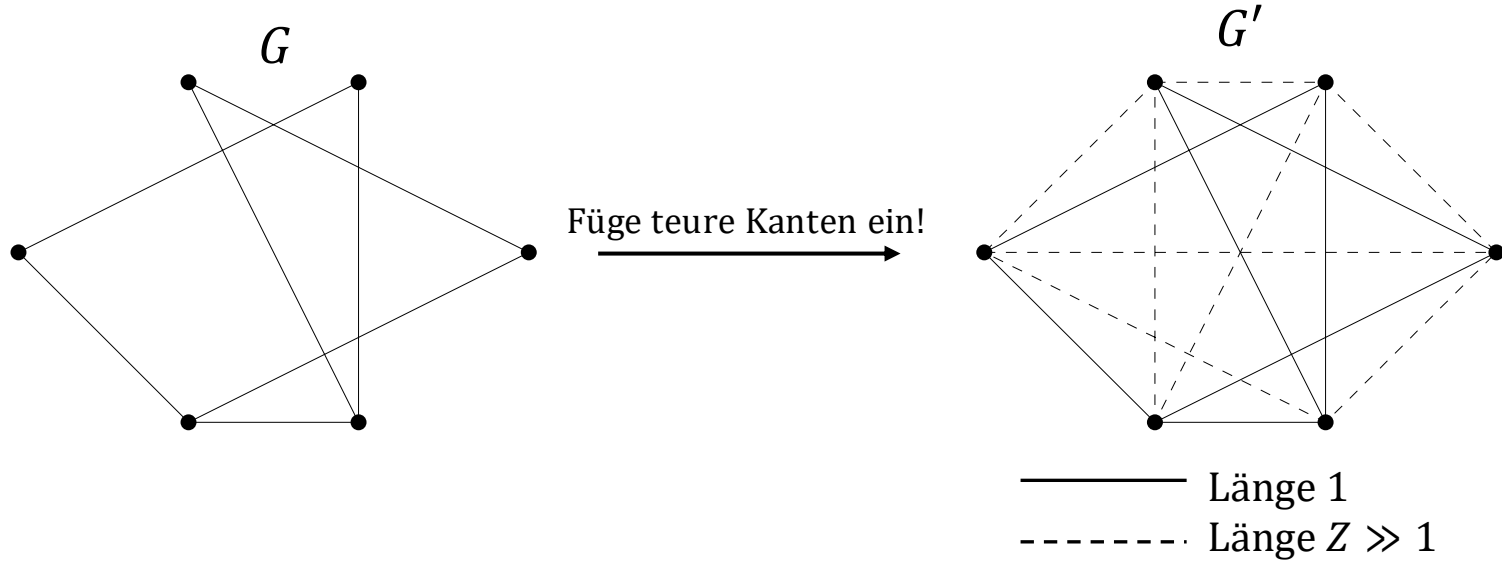


Zu zeigen

D besitzt genau dann einen gerichteten Hamiltonkreis, wenn G einen Hamiltonkreis besitzt.

HC auf TSP

Reduktion von HC auf TSP



Zu zeigen

G besitzt genau dann einen Hamiltonkreis, wenn G' eine Tour der Länge höchstens $n := |V|$ besitzt.

Beweis Korrektheit

„ \Rightarrow “

Wähle die gleichen Kanten von G in G' . Diese haben die Kosten n .

„ \Leftarrow “

Besitzt G keinen Hamiltonkreis, so muss in G' mindestens eine Kante mit Gewicht Z benutzt werden. Somit hat die Tour ein Gewicht von mindestens $n - 1 + Z > n$, da $Z > 1$.

Laufzeit

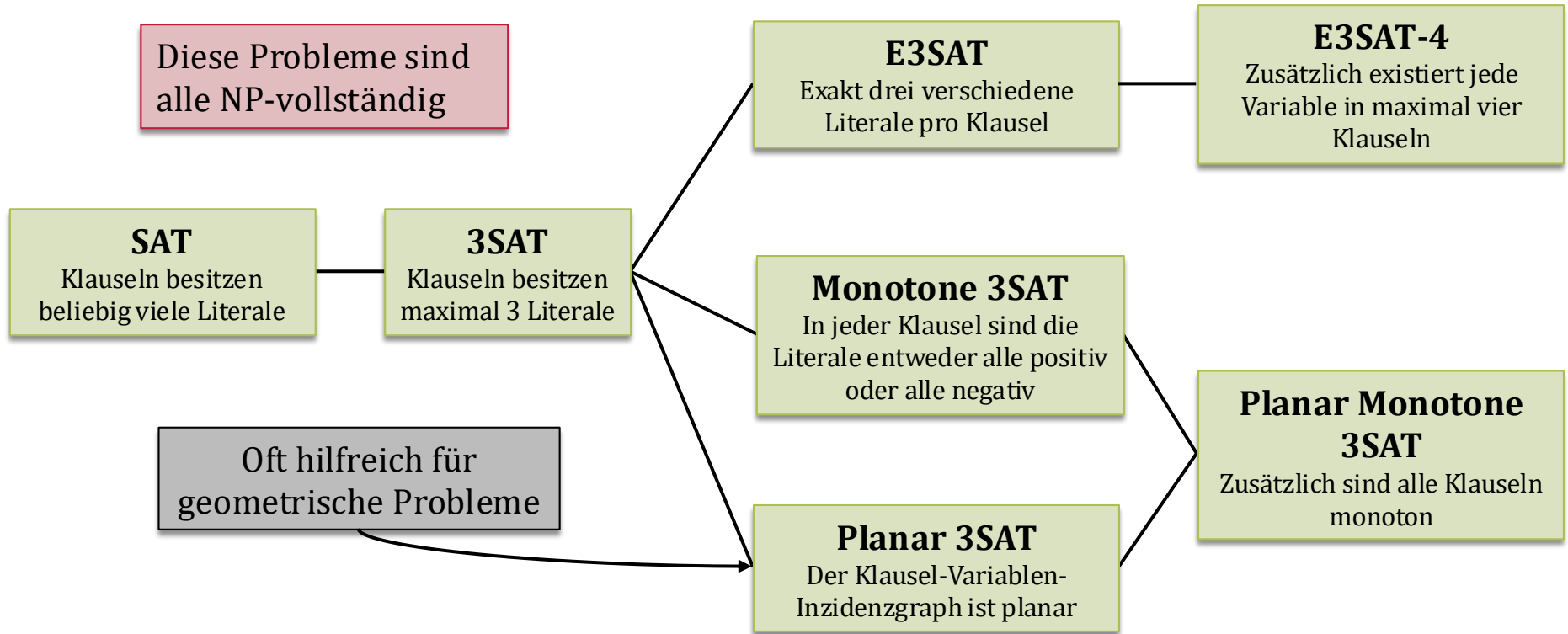
Es müssen $O(n^2)$ Kanten hinzugefügt werden.

Alle $O(n^2)$ Kanten müssen mit Kosten versehen werden.

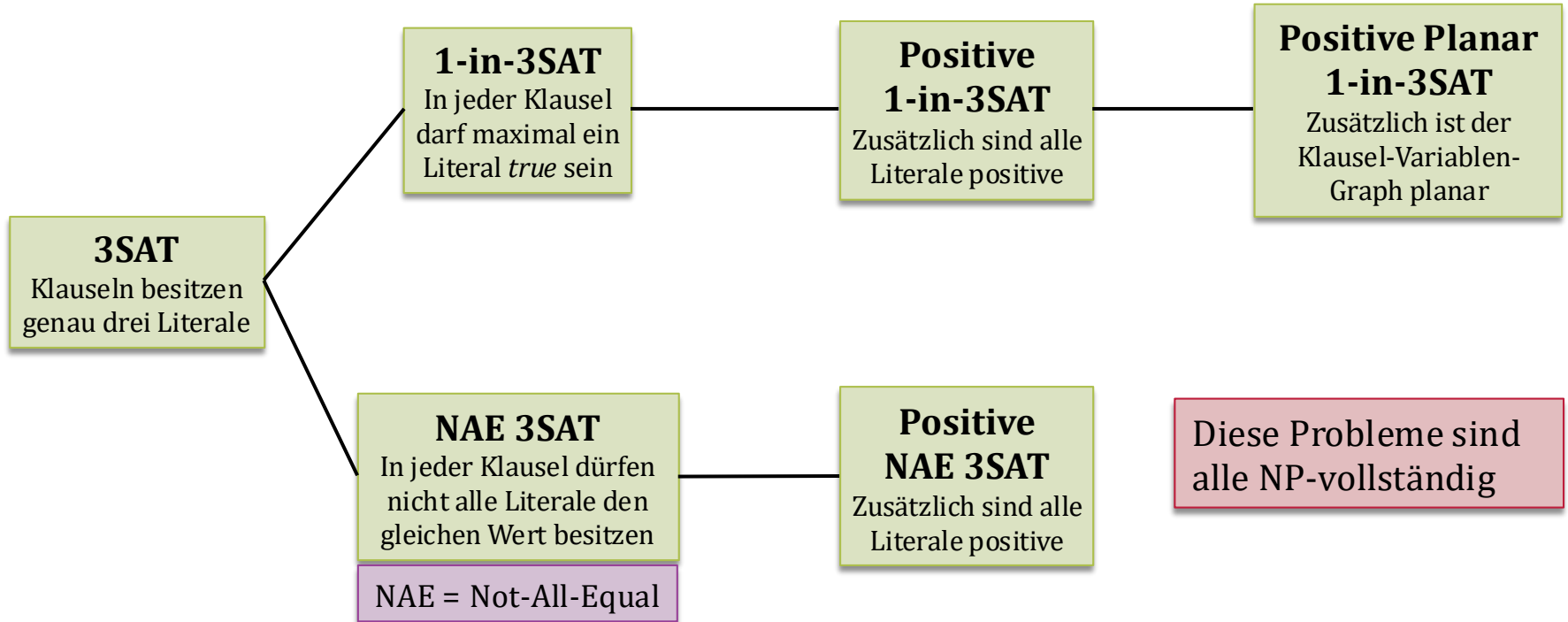
Insgesamt also eine Laufzeit von $O(n^2)$.

Schwere 3SAT-Varianten

3SAT-Varianten



Noch mehr 3SAT Varianten



Nächstes Mal



Können wir allgemein
festhalten, wie wir
Membership zeigen können?

Und wie sieht das mit coNP
aus? Gibt es Probleme in
 $\text{coNP} \cap \text{NP}$?