Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Kapitel 10 – Die Klasse P

Die Klasse P

Welche Probleme lassen sich in polynomieller Zeit mit einer DTM lösen?

Zunächst: Probleme in P heißen auch *effizient lösbare Probleme*.

In der Praxis kann das aber trotzdem lange dauern. Mit Laufzeit $O(n^k)$ steigt die Zeit um 2^k, wenn die Eingabegröße verdoppelt wird.

PRIMES

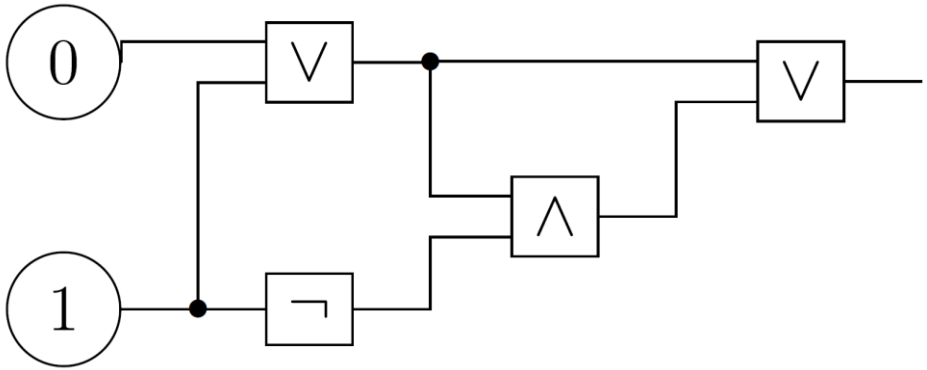
PRIMES
Gegeben: Natürliche Zahl n.
Frage: Ist n eine Primzahl?

Theorem 10.1 (Agrawal, Kayal, Saxena 2002)
PRIMES ist in P.

Das Problem lässt sich in Zeit $O\left((\log n)^{6+\varepsilon}\right)$ lösen, ist also in P.
Die Laufzeit ist allerdings bereits recht hoch für praktische Anwendungen.

Circuit Value Problem (CVP)

Ein Schaltkreis – Beispiel 10.2



Codierung C:

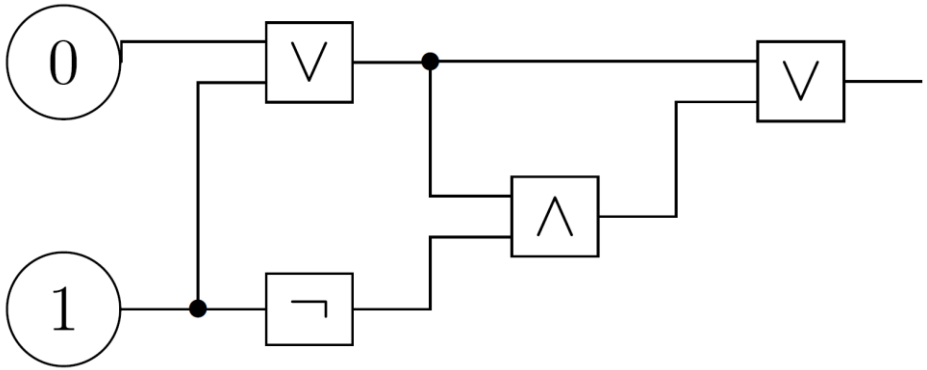
$P_0 = 0$ $\quad$ $P_3 = \neg P_1$

$P_1 = 1$ $\quad$ $P_4 = P_3 \wedge P_2$

$P_2 = P_1 \vee P_0$ $\quad$ $P_5 = P_4 \vee P_2$

Frage:
Welches Signal kommt am Ende heraus?

Boolescher Schaltkreis (Circuit)



Definition 10.3
Ein Boolescher Schaltkreis (Circuit) ist eine Sequenz von endlich viele Zuweisungen

$$P_0 = \cdots, P_1 = \cdots, P_n = \cdots$$

wobei jede Zuweisung P_i mit $i \in \{0, \ldots, n\}$ von einer der Formen ist:

$$P_i = 0 \mid P_i = 1 \mid P_i = \neg P_s \mid P_i = P_s \vee P_t \mid P_i = P_s \wedge P_t$$

mit $s, t < i$.

CVP

Definition 10.3
Ein Boolescher Schaltkreis (Circuit) ist eine Sequenz von endlich viele Zuweisungen

$$P_0 = \cdots, P_1 = \cdots, P_n = \cdots$$

wobei jede Zuweisung P_i mit $i \in \{0, \ldots, n\}$ von einer der Formen ist:

$$P_i = 0 \mid P_i = 1 \mid P_i = \neg P_s \mid P_i = P_s \vee P_t \mid P_i = P_s \wedge P_t$$

mit $s, t < i$.

CIRCUIT VALUE PROBLEM (CVP)
Gegeben: Ein Boolescher Schaltkreis C als Liste von Zuweisungen $P_0, \ldots, P_n$.
Frage: Ist der Wert von P_n gleich 1?

Bemerkung 10.5:
Man kann jede Boolesche Formel in einen Booleschen Schaltkreis übertragen, allerdings ist das Auswerten von Booleschen Formeln in L, während CVP P-vollständig ist.

CVP ist P-vollständig

Theorem 10.6 (Ladner, 1975)
CVP ist P-vollständig (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Lemma 10.7 „Membership“
CVP liegt in P.

CVP ist in P

Lemma 10.7 „Membership“
CVP liegt in P.

Beweis(skizze).
Annahme: Zuweisungen der CVP-Instanz sind durch # getrennt; die n Zuweisungen selbst sind binär codiert und geben somit eine Gesamtgröße von $O(n \log n)$.

Konstruiere eine Mehrband-Maschine:
- Band 1 enthält die Instanz
- Band 2 bewegt sich synchron zu Band 1 und speichert die Auswertungen.
- Band 3 speichert ab, welche Information wir holen sollen.

Wir definieren, wie bspw. für $P_i = \neg P_s$ verfahren wird.

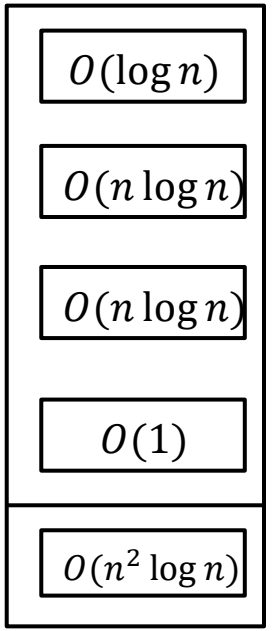
CVP ist in P (II)

Lemma 10.7 „Membership“
CVP liegt in P.

Wir definieren, wie bspw. für $P_i = \neg P_s$ verfahren wird.

- Schreibe bin(s) auf Band 3.
- Laufe auf Band 1 (und synchron Band 2) nach links, um Zuweisung für P_s zu finden und speichere die Negation im Kontrollzustand.
- Laufe auf Band 1 (und Band 2) wieder nach rechts bis P_i erreicht wird. (Zum Überlegen: Wie erkennen wir das?)
- Schreibe den im Kontrollzustand gespeicherten Wert an die entsprechende Stelle des zweiten Bandes.

Die Auswertung anderer Zuweisungen erfolgt ähnlich.



CVP ist P-vollständig

Lemma 10.8 „Hardness“
CVP ist P-schwer (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Beweis:
Wir kennen kein P-schweres Problem, d.h. wir müssen **jedes** Problem aus P auf CVP reduzieren können.

Ab an die Tafel!