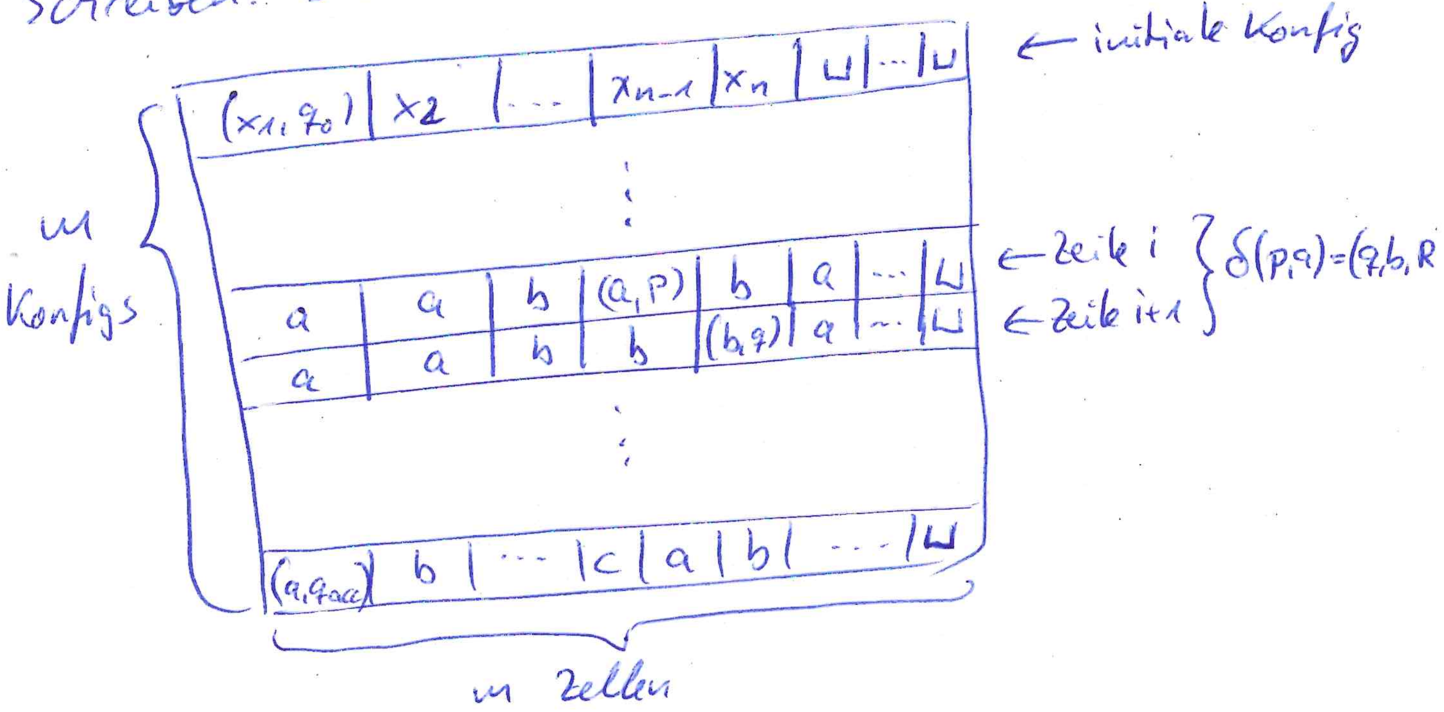
Theo 2 – VL 18

Beweis Lemma 10.8

Sei $A \in P$ und M eine DTM mit $\mathcal{L}(M) = A$ und Zeitverbrauch $\mathcal{O}(n^k)$.
Wir treffen 3 Annahmen:

1. $\exists$ Konstanten $k, c, d \in \mathbb{N}$, sodass M zur Eingabe der Länge n nach $\leq c \cdot n^k + d$ Schritten hält.
2. M hat nur ein, rechts unbeschränktes Band.
3. M steht zum Akzeptieren wieder auf der linkesten Zelle.

Sei nun $m = c n^k + d + 1$. Die m. Konfiguration ist spätestens die Haltekonfiguration. Außerdem kann M $\leq m$ Zeichen schreiben. Damit erhalten wir eine $m \times m$-Matrix:



Diese Matrix können wir nicht explizit in log-space berechnen! Allerdings sind die Unterschiede von Zeile zu Zeile nur lokal.

Idee: Halte über Variablen fest, ob ein bestimmtes Zeichen in einer bestimmten Zelle ist.

Sei $P_{ij}^{a} \hat{=}$ Die i-te Konfig enthält in Zelle j Symbol a

$Q_{ij}^{p} \hat{=}$ In der i-ten Konfig steht der Kopf in Zelle j und M ist in Zustand p.

Definiere diese 0-1-Variablen für alle $0 \leq i,j \leq m$, $a \in \Gamma$, $p \in Q$

Da wir die erste Zeile kennen, können wir Werte fixieren:

Setze $P_{0j}^{x_j} = 1$ | für alle $j = 0, \ldots, n-1$ ~~und~~

und $P_{0j}^{b} = 0$ | mit $b \neq x_j$

Setze $P_{0j}^{\sqcup} = 1$ | für $j = n, \ldots, m$

$P_{0j}^{b} = 0$ | mit $b \neq \sqcup$

Setze $Q_{00}^{q_0} = 1$, sowie

$Q_{00}^{q} = 0$ für $q \neq q_0$

und $Q_{0j}^{q} = 0$ für $j = 1, \ldots, m$ und $q \in Q$

Für alle anderen Variablen nutzen wir die Transitionrelation:

$$P_{(i+1)j}^{b} = \underbrace{\bigvee_{\delta(q,a)=(p,b,d)} \left(Q_{ij}^{q} \wedge P_{ij}^{a}\right)}_{\text{M schreibt in Zelle j}} \vee \underbrace{\left(P_{ij}^{b} \wedge \bigwedge_{q \in Q} \neg Q_{ij}^{q}\right)}_{\text{Kopf ist nicht in Zelle j, Symbol bleibt erhalten}}$$

$$Q^p_{(i+1)j} = \bigvee_{\delta(q,a)=(p,b,N)} \left(Q^q_{ij} \wedge P^a_{ij}\right)$$ Bewegung des Kopfes Neutral

$$\vee \bigvee_{\delta(q,a)=(p,b,R)} \left(Q^q_{ij-1} \wedge P^a_{ij-1}\right)$$ Rechts

$$\vee \bigvee_{\delta(q,a)=(p,b,L)} \left(Q^q_{i,j+1} \wedge P^a_{i,j+1}\right)$$ Links

Wichtig: Kann der Kopf nicht von links oder rechts kommen, lassen wir den Fall weg ($j=0$ bzw $j=m$).

Für den Circuit C setzen wir die Zuweisung so, dass alle Zuweisungen bzgl. der i-ten Konfig vor den Zuweisungen der i+1-sten Konfig kommen. Als letztes kommt die Zuweisung für $Q^{q_{acc}}_{m0}$.

$x \mapsto C$ ist die gesuchte Reduktion!

Korrektheitsbeweis lassen wir an dieser Stelle aus.
Für die Laufzeit:
Wir benötigen Zähler für i, j, b und q
Es gilt $i, j \leq m$, ~~b, q~~ $b, q \leq$ Konstante

$\Rightarrow$ Zähler belegen $2\log(m) + 2\log(d) \leq 4\log(m)$

$\approx 4\log(n^k) = 4k\log(n)$

also logarithmisch viel Platz.

$\square$