Theo 2 - VL 15

Heute: Palindrome

Betrachte Sprache

$$L = \{ w \mid w = x x^{reverse} \text{ mit } x \in \Sigma^* \}$$

Wie viel Zeit und Platz benötigt eine TM, wenn man

a) 1-~~Ba~~ Band
b) 2- Bänder
c) 1 read-only Band und 1 Arbeitsband besitzt?

Wir setzen dabei $n := |w|$

a) Wiederhole folgende Schritte bis $w = \varepsilon$

1. ~~Lösche~~ Merke und Lösche erstes Zeichen c.
2. Prüfe, ob letztes Zeichen $c' = c$. *
3. Falls ja: Lösche c' und kehre an linke Ende zurück
4. Falls nein: Weise ab

Akzeptiere, sobald Schleife zu ende.

*: Falls c' nicht existiert, kann auch abgewiesen werden.

Platzbedarf: w selbst, also $O(n)$

Zeitbedarf: $\frac{n}{2}$ Iterationen mit $i \in \{n, n-1, \dots, 1\}$ Schritten,

also n^2

b) 1. Kopiere w auf Band 2 $\rightarrow O(n)$

2. Gehe auf Band 1 von links nach rechts und auf Band 2 von rechts nach links und vergleiche Zeichen.
3. Falls ein Zeichen nicht übereinstimmt: weise ab

$O(n)$

4. Wenn alle Zeichen geprüft, prüfe auf gerade Länge.
5. Ist $|w| \bmod 2 = 0$, akzeptiere, sonst weise ab.

selbst: $O(n)$

Speicherplatz: 2 · mal w, also $O(n)$

Laufzeit: $O(n)$, siehe grüne Anmerkung.

c) Schritte 4+5 gehen auch mit $\log n$ Speicher, d.h. und $O(n)$ Zeit

wir möchten noch prüfen, wie wir auf Palindrom checken.

Für $i = 1, \ldots n$:

1 Zähler

Merke Zeichen an Position i

2. Zähler → zum finden der Position.

Prüfe ob Zeichen an Position $n-i+1$ gleich ist.

3. Zähler

Da nur 3 Zähler nötig, benötigen wir nur $\log n$ Platz.

Zu den Positionen gehen schafft man in $O(n)$ Zeit pro Iteration.

$\Rightarrow O(n^2)$ Zeit

Zusammenfassend

	Zeit	Platz	
1-Band	n^2	n	aber $O(1)$ Extraspeicher.
2-Band	n	n	
1 read-only 1 Arbeitsband	n^2	$\log n$	Zeit reduzierbar auf $\frac{n^2}{\log n}$ durch merken von $\log n$ Zeichen.

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{L} \in P \qquad\qquad \mathcal{L} \in L$$

Beste Zeit: $O(n)$, bester Platzverbrauch $O(\log n)$.

Frage: Existiert TM, ~~mit~~ die $\mathcal{L}$ in Zeit $O(n)$ und Platzverbrauch $O(\log n)$ entscheidet?

Lemma:

Sei M eine TM mit read-only Eingabeband und einem Arbeitsband, welche $\mathcal{L}$ entscheidet. Sei $T(n)$ die benötigte Zeit und $S(n)$ der benötigte Platz auf dem Arbeitsband. Dann gilt $\underbrace{S(n) \cdot T(n) \geq c \cdot n^2}_{\text{oder auch } S(n) \cdot T(n) \in \Omega(n^2)}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis

Betrachte eine Worst-Case-Instanz, bspw. $w: x\, 0^{2m}\, x^{reverse}$ mit $|x| = m$, d.h. $|w| = n = 4m$ bzw. $m = \frac{n}{4}$. O.B.d.A ist $x \in \{0,1\}^*$

Um w auf ein Palindrom zu prüfen, müssen Zeichen aus x mit Zeichen aus $x^{reverse}$ verglichen werden. Wir können aber max. $S(n)$ Zeichen speichern

$\Rightarrow$ Der Kopf auf dem Eingabeband muss 0^{2m} mind. $\frac{m}{S(n)} = \frac{n}{4S(n)}$ oft übertreten, was $2m = \frac{n}{2}$ Schritte benötigt.

$\Rightarrow T(n) \geq \frac{n}{4S(n)} \cdot \frac{n}{2} \quad \Rightarrow T(n)\,S(n) \geq \frac{1}{8} n^2$

Für das Palindromproblem existiert ein Space-Time trade-off

Mehr Speicherplatz $\rightarrow$ geringere Laufzeit.
Mehr Laufzeit $\rightarrow$ geringerer Speicherbedarf.