Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

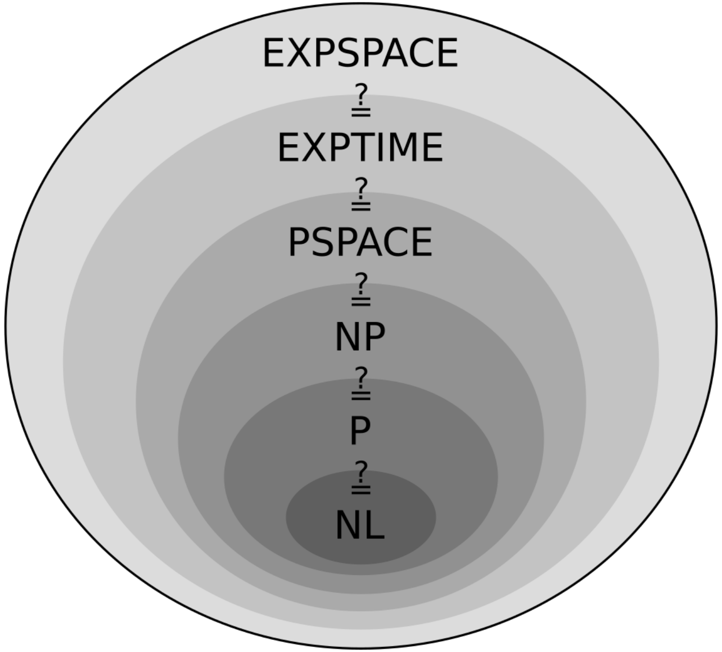
Kapitel 7.3 – Grundlegende Relationen

Relationen

Wie stehen die Klassen zueinander?
Da jede DTM auch eine NTM ist, gelten folgende Sätze:

Lemma 7.21
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m \in \mathbb{N}$ gilt
- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NTIME}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{DSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Korollar 7.22
Es gilt
L ⊆ NL, P ⊆ NP, PSPACE ⊆ NPSPACE, EXP ⊆ NEXP, usw.



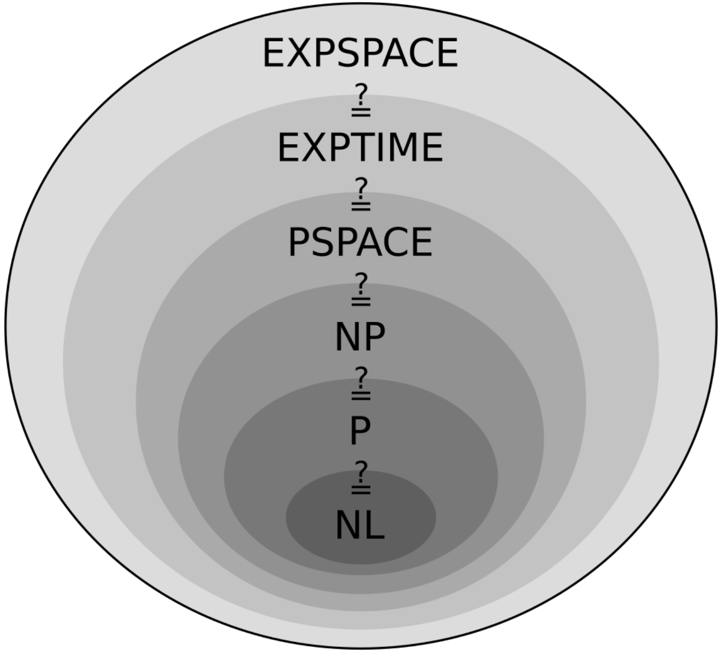
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

Relationen II

Auch recht klar: Wenn ich etwas schreiben muss, kostet es Zeit.

Lemma 7.23
Für jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt
- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Beweisskizze:
Nutze in der read-only TM das erste Arbeitsband, um Änderungen am Eingabewort zu speichern.
Alle anderen Bänder arbeiten identisch.



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

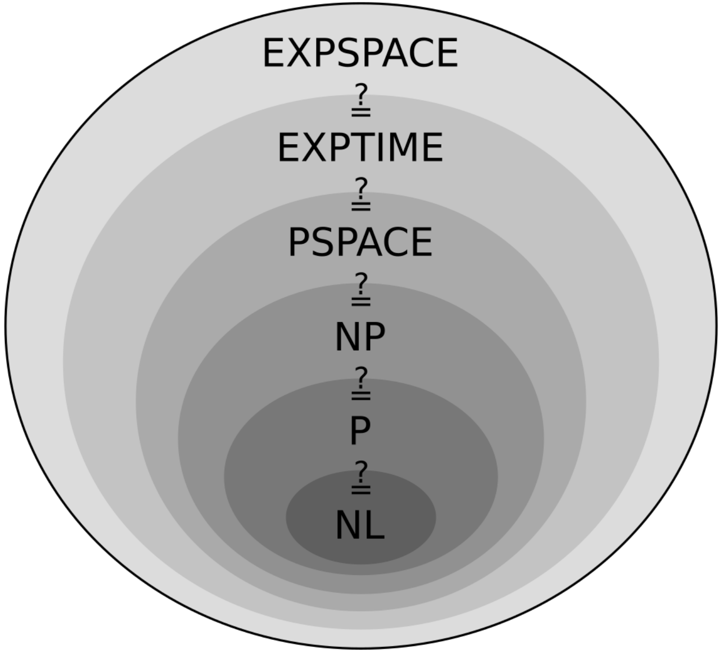
Relationen III

Auch recht klar: Wenn ich etwas schreiben muss, kostet es Zeit.

Lemma 7.23
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Korollar 7.24
Es gilt
$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}, \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{NPSPACE}, \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$, usw.



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

NTIME vs DSPACE

Lemma 7.25
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

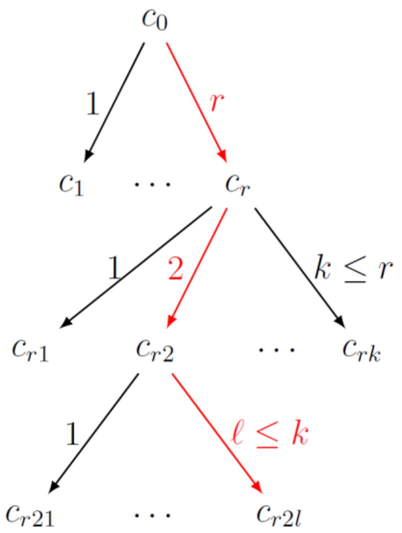
$$\text{NTIME}_m(f) \subseteq \text{DSPACE}_{m+1}(f)$$

Nach Th. 1.17 existiert zu jeder NTM M eine DTM M' mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ und wenn M Entscheider ist, dann auch M'.

Prinzip: Tiefensuche im Berechnungsbaum von M zu Eingabe x.
Wenn M eine m-Band-TM ist, dann ist M' eine (m+2)-Band-TM:

- Erstes Band: Speichert x und ist read-only.
- Zweites Band: Pfad zum aktuellen Knoten im Baum.
- Restlichen m Bänder: Speichern der Konfiguration von M

Da M f-zeitbeschränkt, ist die Länge jeder Berechnung (also auch die Höhe des Berechnungsbaumes) durch f beschränkt.



NTIME vs DSPACE

Lemma 7.25
Für jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

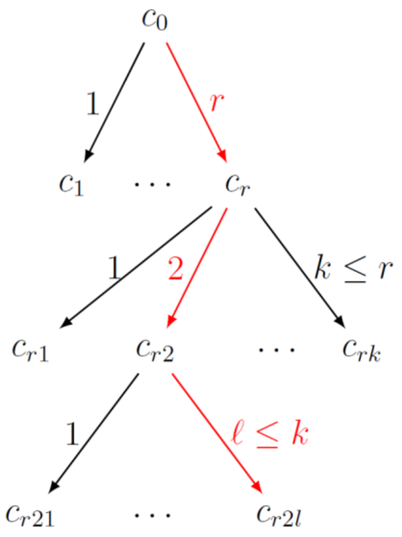
$$\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_{m+1}(f)$$

- Erstes Band: Speichert x und ist read-only.
- Zweites Band: Pfad zum aktuellen Knoten im Baum.
- Restlichen m Bänder: Speichern der Konfiguration von M

Da M f-zeitbeschränkt, ist die Länge jeder Berechnung (also auch die Höhe des Berechnungsbaumes) durch f beschränkt.

- Eingabe ist read-only, zählt also nicht.
- Berechnungsbaum hat höchstens Höhe $f(n)$, also kann der Pfad zu jedem Knoten mit $f(n)$ Richtungen beschrieben werden.
- Aus Lemma 7.23 folgt die Platzbeschränkung restlicher Bänder.

→ Wir benötigen nur m+1 Bänder mit höchstens $f(n)$ Platz.



Bandreduktionen

Wir zeigen gleich, dass das zusätzliche Arbeitsband auch eliminiert werden kann, ohne den Platzverbruach zu erhöhen. Damit folgt

Korollar 7.26
Es gilt

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}, \mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$$

Lemma 7.27
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\big(O(f \cdot f)\big)$, sowie $\mathrm{DSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_1\big(O(f)\big)$
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NTIME}_1\big(O(f \cdot f)\big)$, sowie $\mathrm{NSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_1\big(O(f)\big)$

Skizze: Nutze das Lemma zur Bandreduktion.
Zeige dann, dass pro Simulationsschritt höchstens konstant oft über das gesamte Eingabewort gescannt werden muss, was zu einer Quadrierung der Laufzeit führt.
Die einzelnen Bänder können dann auch jeweils mit Laufzeit $f(n)$ simuliert werden.

Die Klasse P

Lemma 7.29
Für jedes $m > 0$ gilt

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right)$$

Beweis „$\subseteq$":
$\mathrm{DTIME}_1\left(O(n^k)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right)$ ist klar.

Damit ist

$$\mathrm{P} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right)$$

Die Klasse P

Lemma 7.29
Für jedes $m > 0$ gilt

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right)$$

Beweis „⊇“:
$\mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\left(O(n^{2k})\right)$ nach Lemma 7.27.

Für jedes k ist diese Klasse in P enthalten, also ist

$$\mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\left(O(n^{2k})\right) \subseteq \mathrm{P}$$

NSPACE und DTIME

Proposition 7.30
Für jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) \geq \log n\,,\ \forall n$ gilt

$$\mathrm{NSPACE}(f) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(f)}\right)$$

Beweis: Tafel

Inklusion der Komplexitätsklassen

Korollar 7.31
Es gilt $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, und $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$

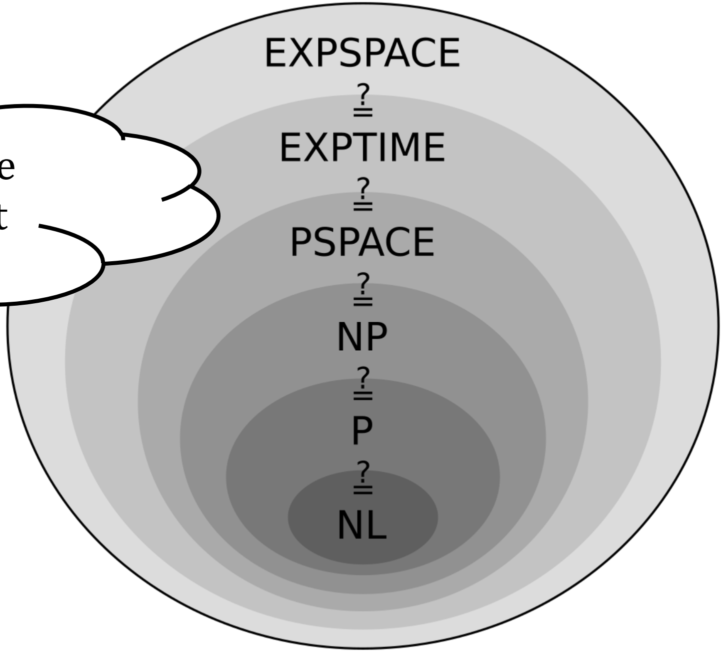
Theorem 7.32
Die robusten Komplexitätsklassen bilden eine aufsteigende Kette,

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE} \subseteq \cdots$$

Lemma 7.33
Die robusten Komplexitätsklassen sind unter polynomiellen Blowup abgeschlossen.
(bspw.: Ist $\mathrm{DTIME}\big(f(n)\big) \subseteq \mathrm{P}$ dann gilt auch $\mathrm{DTIME}\left(f\left(n^k\right)\right) \subseteq \mathrm{P}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Außer für L und NL folgt das aus der Definition.
Für L und NL können Logarithmengesetze genutzt werden, um die Aussage zu zeigen.

Nächste Woche



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102