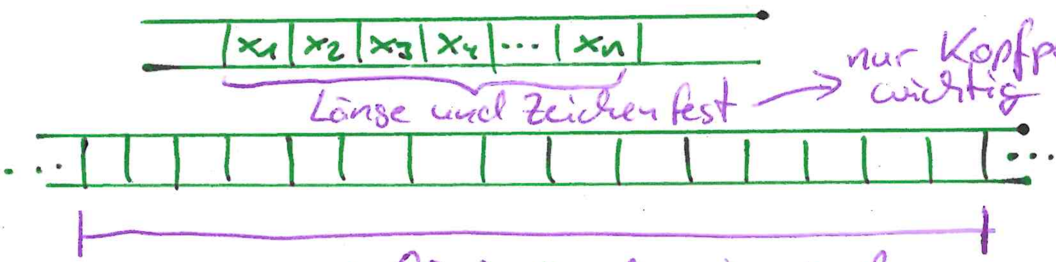
Proposition 7.25

Beweis

Sei $\mathcal{L}(M) \in NSPACE(f)$ mit M ein f-platzbeschränkter nicht-deterministischer Entscheider mit read-only Eingabe und einem Arbeitsband ist. Betrachte Eingabe $x \in \Sigma^*$ der Länge $|x| =: n$.

Wie viele Konfigurationen können in M auftreten?



Länge und Zeichen fest $\to$ nur Kopfposition wichtig $\to$ n Optionen

$\leq f(n)$ Zeichen in jeder Konfig! $\to$ $|\Gamma|^{f(n)}$ Optionen

Auch wichtig die Kopfposition $\to$ $f(n)$ Optionen

$\Rightarrow n \cdot \underbrace{|\Gamma|^{f(n)}} \cdot f(n)$ mögliche Konfigurationen

$= 2^{\log|\Gamma| \cdot f(n)}$, also $2^{\log n + \log f(n) + \log|\Gamma| \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))}$

Wie viele der $2^{O(f(n))}$ Konfigurationen kann eine Berechnung maximal ablaufen?

Maximal genauso viele!

Angenommen, es gäbe eine Berechnung

$$c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_j \quad \text{mit} \quad j > 2^{O(f(n))}$$

Dann existieren Indizes i, i' mit $i < i'$ und $c_i = c_{i'}$

Dann existiert aber eine nicht-haltende Berechnung

$$c_0 \to \dots \to c_i \to \dots \to c_{i'} = c_i \to \dots \to c_{i'} = c_i \to \dots$$

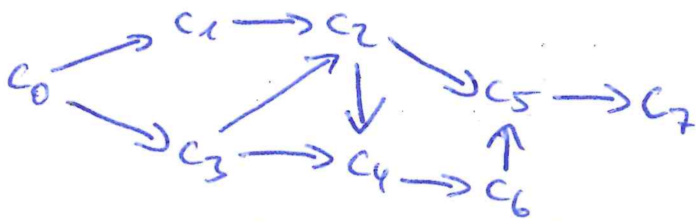
$\Rightarrow$ M wäre kein Entscheider ↯

$\Longrightarrow$ $\boxed{NSPACE(f)} \subseteq NTIME(2^{O(f)})$ und

$DSPACE(f) \subseteq \boxed{DTIME(2^{O(f)})}$ $\subseteq$ offen!

Um $NSPACE(f) \subseteq DTIME(2^{O(f)})$ zu zeigen, betrachten wir den <u>Konfigurationsgraphen</u> von M zur Eingabe x:

- Jeder Knoten entspricht einer Konfiguration von M
- Es existiert eine Kante $u \to v$, wenn Konfiguration hinter v aus der Konfiguration hinter u entsteht.



Mit obiger Argumentation ist der Graph azyklisch (keine gerichteten Kreise). In der Literatur auch: DAG

Dieser Graph besitzt $2^{O(f)}$ Knoten, d.h. bspw Tiefensuche nach haltender Konfiguration dauert $2^{O(f)}$ Zeit. $\square$