Theo 2 - VL 11

Heute: PCP und Satz von Rice Beispiele

1.) PCP-Variante $PCP_{\equiv r}$:

Gegeben: $(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)$ mit $x_i, y_i \in \{0,1\}^*$

Gesucht: Nicht-leere, endliche Sequenz $i_1,\dots,i_n$ mit $n \bmod r = 0$
mit $x_{i_1}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}\cdots y_{i_n}$

Zeige: $0\text{-}1\text{-}PCP \leq PCP_{\equiv r}$

Beweis: Kacheln bleiben unverändert.

Zu zeigen 0-1-PCP-Instanz hat eine Lösung I, gdw. $PCP_{\equiv r}$-Instanz eine Lösung I' hat.

Sei $I = i_1,\dots,i_n$ eine Lösung für 0-1-PCP mit
$n \bmod r = q \in \{0,\dots,r-1\}$.

Dann ist aber $I^r = \underbrace{III\dots I}_{r\text{-Mal}}$ auch ein Lösung für $PCP_{\equiv r}$, das $(rn) \bmod r = 0$. D.h. $PCP_{\equiv r}$ ist auch lösbar.

Andersherum ist jede Lösung für $PCP_{\equiv r}$ auch eine Lösung für 0-1-PCP. $\square$

2) Variante $PCP_{\leq k}$

Gegeben: $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ mit $x_i, y_i \in \{0,1\}^*$

Gesucht: Nicht-leere, endliche Sequenz $i_1, \dots, i_n$ mit $n \leq k$

mit $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$

Dieses Problem ist entscheidbar!

Es gibt nur $\approx m^k$ viele Möglichkeiten m Kacheln auf $\leq k$ Positionen zu legen.

Prüfen einer Sequenz funktioniert in endlicher Zeit.

$\Rightarrow$ In endlicher Zeit kann geprüft werden, ob es eine Sequenz gibt, oder eben nicht.

---

3) Seien $a, b \in \Sigma^*$ und $L_{a,b} = \{w \mid a \in L(M_w) \text{ und } b \notin L(M_w)\}$

Zeige mit Hilfe des Satzes von Rice über monotone Eigenschaften, dass $L_{a,b}$ weder semi-, noch co-semi-entscheidbar ist.

Betrachte

- $L_1 = \{a\}$ $\Rightarrow$ TM M_1 mit $L(M) = L_1$ gilt also $\langle M_1 \rangle \in L_{a,b}$
- $L_2 = \{a, b\}$ $\Rightarrow$ Für TM M_2 mit $L(M) = L_2$ gilt also $\langle M_2 \rangle \notin L_{a,b}$

$L_2 \supset L_1$, aber $P(L_2) = 0 < P(L_1) = 1$

$\Rightarrow L_{a,b}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Für Nicht-Co-Semi-Entscheidbarkeit, zeige, dass das Komplement eine nicht-monotone Eigenschaft besitzt.

$\overline{L_{a,b}} = \{w \mid a \notin L(M_w) \text{ oder } b \in L(M_w)\}$

Betrachte

- $L_0 = \{\varepsilon\} \Rightarrow \exists$ TM M_0 mit $L(M_0) = L_0$, also
  $\langle M_0 \rangle \in \overline{L_{a,b}}$

- $L_1 = \{a, \varepsilon\} \Rightarrow \exists$ TM M_1 mit $L(M_1) = L_1$, also
  $\langle M_1 \rangle \in \overline{L_{a,b}}$

Da $L_1 \supset L_0$ und $P(L_1) = 0 < 1 = P(L_0)$ ist $\overline{L_{a,b}}$ nicht semi-entscheidbar, also $L_{a,b}$ nicht co-semi-entscheidbar. $\square$

4) $L_T = \{w \mid M_w \text{ hält auf jeder Eingabe}\}$

Satz von Rice anwendbar?

Nein!

Betrachte Sprache $L = \{a\}$.

Für L gibt es Entscheider : ~~$M_?$~~

if $x = a$ akzeptiere
else weise ab

aber auch Nicht-Entscheider

```
if x = a akzeptiere
else
    while (true) {
        skip/continue;
    }
```

$\Rightarrow$ Eigenschaft bezieht sich auf TMs ↯

5) $L_{\geq 1} = \{w \mid M_w \text{ akzeptiert mindestens ein Wort}\}$

$\overset{a)}{=} \{w \mid |L(M_w)| \geq 1\} \overset{b)}{=} \{w \mid L(M_w) \neq \emptyset\}$

a) $\Rightarrow$ Also eine Spracheigenschaft $\Rightarrow$ SvR anwendbar. $\Rightarrow$ nicht entscheidbar!

Eigenschaft ist monoton (b)):
Besitzt eine Sprache mind. 1 Wort, dann hat auch jede Supermenge mind. 1 Wort.

Wie ist das mit dem Komplement

$\overline{L_{\geq 1}} = \{w \mid L(M_w) = \emptyset\}$.

$L_\emptyset = \emptyset \Rightarrow \exists$ TM $M_\emptyset$ mit $L(M_\emptyset) = \emptyset$

also $P(L(M_\emptyset)) = 1$

aber

$L_\varepsilon = \{\varepsilon\} \Rightarrow \exists$ TM M_ε mit $L(M_\varepsilon) = L_\varepsilon$

also $P(L(M_\varepsilon)) = 0$

Da $L_\varepsilon \supset L_\emptyset$, aber $P(L_\varepsilon) = 0 < 1 = P(L_\emptyset)$

$\Rightarrow \overline{L_{\geq 1}}$ nicht semi-entscheidbar

$\Rightarrow L_{\geq 1}$ nicht co-semi-entscheidbar.