Theo 2 – VL 10

Definition 5.7

Sei Σ ein Alphabet. $RE(\Sigma)$ bezeichnet die Menge alle rekursiv aufzählbaren Sprachen über Σ, also alle Sprache $\mathcal{L}$, für die eine TM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}$ existiert.

Eine Eigenschaft P der Sprachen in $RE(\Sigma)$ ist eine Funktion $P: RE(\Sigma) \rightarrow \{0,1\} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{B} = \{\text{false}, \text{true}\}$

Wir sagen, die Sprache $\mathcal{L} \in RE(\Sigma)$ hat Eigenschaft P, falls $P(\mathcal{L}) = 1$ gilt.

Eine Eigenschaft heißt trivial, wenn P eine konstante Funktion ist. Andernfalls heißt sie nicht-trivial.

Theorem 5.9 (Satz von Rice)

Sei P eine bel. nicht-triviale Eigenschaft. O.B.d.A sei $P(\emptyset) = 0$.
Da P nicht-trivial, ex. $\mathcal{L} \neq \emptyset$ mit $P(\mathcal{L}) = 1$.
Sei K eine TM mit $\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}$.

Wir zeigen:

$$\text{ACCEPT} \leq P = \{w \in \{0,1\}^* \mid P(\mathcal{L}(M_w)) = 1\}$$

Sei $w\#x \in ACCEPT$. Wir konstruieren eine TM $M^K_{w,x}$, deren Sprache $\emptyset$ ist, falls $x \notin \mathcal{L}(M_w)$ also $P(\mathcal{L}(M^K_{w,x}))=0$

$\mathcal{L}$ ist, falls $x \in \mathcal{L}(M_w)$ also $P(\mathcal{L}(M^K_{w,x}))=1$

Für Eingabe y arbeitet $M^K_{w,x}$ wie folgt:

1. Speichere y auf separatem Band
2. Ersetze Eingabe durch x.
3. Simuliere M_w auf x
4. Falls M_w x akzeptiert, $\underbrace{\text{simuliere } K \text{ auf Eingabe } y}_{\text{Damit } \mathcal{L}(M^K_{w,x}) = \mathcal{L} \text{ ist.}}$
5. Akzeptiere, falls K akzeptiert.

Wenn M_w Eingabe x akzeptiert, d.h. $w\#x \in ACCEPT$, dann hält die Simulation in Schritt 3.
Außerdem ist $y \in \mathcal{L}(M^K_{w,x})$, gdw. $y \in \mathcal{L}(K)$. Da $\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}$ mit $P(\mathcal{L}) = 1$, ist auch $y \in \mathcal{L}$. $\Rightarrow \langle M^K_{w,x} \rangle \in P$

Akzeptiert M_w Eingabe x nicht, d.h. $w\#x \notin ACCEPT$, so terminiert Schritt 3 und somit $M^K_{w,x}$ nicht, oder $M^K_{w,x}$ akzeptiert nichts.
$\Rightarrow \mathcal{L}(M^K_{w,x}) = \emptyset \Rightarrow P(\mathcal{L}(M^K_{w,x})) = 0 \Rightarrow$
$\langle M^K_{w,x} \rangle \notin P$ $\square$