Theo 2 – VL 9

Heute: Reduktionen üben!

Wichtig: Überblick über Probleme haben.

Bekannte Probleme

$ACCEPT = \{w\#x \mid M_w \text{ akzeptiert } x\}$

$ACCEPT_\varepsilon = \{w \mid M_w \text{ akz. } \varepsilon\}$

$HP = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$

$HP_\varepsilon = \{w \mid M_w \text{ hält auf } \varepsilon\}$

Alle semi-entscheidbar, aber nicht co-semi-entscheidbar.

Komplement

$\overline{ACCEPT} = \{w\#x \mid M_w \text{ akz. } x \text{ nicht}\}$

$\overline{ACCEPT_\varepsilon} = \{w \mid M_w \text{ akz. } \varepsilon \text{ nicht}\}$

$\overline{HP} = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$

$\overline{HP_\varepsilon} = \{w \mid M_w \text{ hält auf } \varepsilon\}$

Alle co-semi-entscheidbar, aber nicht semi-entscheidbar.

Betrachte Struktur der Probleme, bspw

HP: $\boxed{\exists y}$: M_w hält auf x nach y Schritten

$\Rightarrow$ Schrittzahl muss begrenzt sein

$\overline{HP}$: $\boxed{\forall y}$: M_w hält nicht auf x nach y Schritten

$\Rightarrow$ Schrittzahl ist unbegrenzt

Quantoren liefern ein Indiz, ob es nicht semi- oder nicht co-semi-entscheidbar ist.

Betrachte folgendes Problem

EMPTINESS
Gegeben: TM M
Frage: Hält M auf gar keiner Eingabe?

Als Sprache:

$\text{EMPTINESS} = \{w \mid M_w \text{ hält nie}\}$ → $\forall x \in \Sigma^* \, \forall i \in \mathbb{N}$: M_w hält nicht auf x nach i Schritten.

$\overline{\text{EMPTINESS}} = \{w \mid M_w \text{ hält auf mindestens einer Eingabe}\}$

Sehr ähnlich dazu

Totality
Gegeben: TM M
Frage: Hält M auf jeder Eingabe?

Als Sprache:

$\text{TOTALITY} = \{w \mid M_w \text{ hält immer}\}$ → $\forall x \in \Sigma^* : \exists i \in \mathbb{N}$: M_w hält auf x nach i Schritten

$\overline{\text{TOTALITY}} = \{w \mid M_w \text{ hält auf mind. einem Wort nicht}\}$

Wir zeigen:

1. EMPTINESS ist co-semi-entscheidbar
2. EMPTINESS ist nicht semi-entscheidbar
3. Totality ist nicht co-semi-entscheidbar
4. Totality ist nicht semi-entscheidbar

1) EMPTINESS ist co-semi-entscheidbar.

D.h. wir können eine TM konstruieren, die abweist, falls ein Wort x existiert auf welchem M_w hält. Falls kein Wort x existiert, loopen wir unendlich.

Frage: Wie finden wir das gesuchte Wort x (nicht-)deterministisch, sodass jeder Berechnungspfad endlich ist, falls x existiert?

$\Rightarrow$ Gehe Worte systematisch durch.

Eingabe: w

Frage: Hält M_w nie?

```
for i = 0, 1, 2, ... do
| for x ∈ {0,1}^{≤i} do                    oder Allg. x ∈ Σ^{≤i}
| | Simuliere M_w auf x mit ≤ i Schritten
| | Falls M_w auf x nach ≤ i Schritten hält
| | (also akz. oder abweist)
L L L      return false.
```

Existiert $x \in \Sigma^*$, auf welchem M_w hält, dann ~~geschieht~~ hält unsere TM ~~das~~ spätestens in Iteration $i = \max(|x|, \text{Zeit für } M_w \text{ auf } x)$

Jede i-Iteration ist endlich $\Rightarrow$ Wir finden x.

$\Rightarrow$ EMPTINESS ist co-semi-entscheidbar.

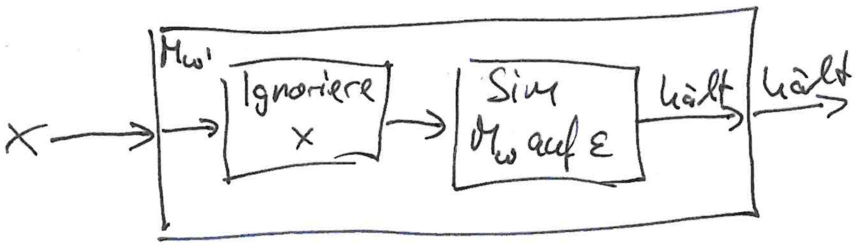
2) EMPTINESS ist nicht semi-entscheidbar

Reduktion $\overline{HP_\varepsilon} \leq$ EMPTINESS

Suche totale, berechenbare Fkt $f: w \mapsto w'$ mit

M_w hält nicht auf $\varepsilon \Longleftrightarrow M_{w'}$ hält nie

$M_{w'}$ ~~brach~~ braucht also nur M_w auf ε simulieren und ignoriert eigenen Input:



Hält M_w auf ε, so hält $M_{w'}$ nach Konstruktion auf bel. x, also $w \notin \overline{HP_\varepsilon} \Rightarrow w' \notin$ EMPTINESS

Hält $M_{w'}$, muss auch M_w auf ε gehalten haben, also

$w \notin \text{EMPTINESS} \Rightarrow w \notin \overline{HP_\varepsilon}$ $\square$

3) HP $\leq$ Totality

Funktion $f: w\#x \to w'$ mit

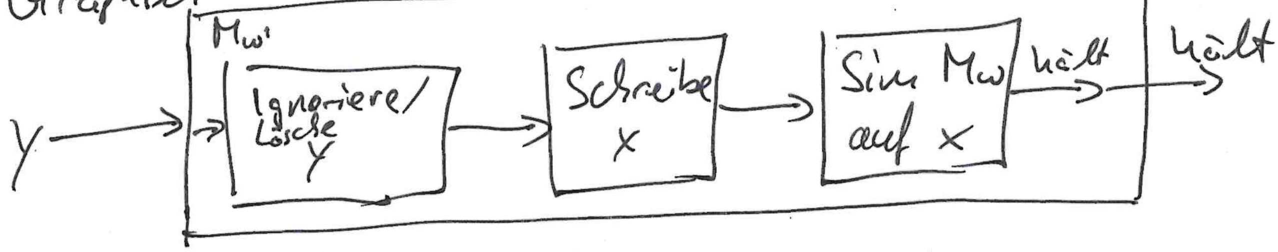
$$M_w \text{ hält auf } x \Leftrightarrow M_{w'} \text{ hält immer}$$

Idee: lass $M_{w'}$ nur auf x mittels M_w laufen:

1. Ignoriere Input
2. Schreibe x auf das Band
3. Simuliere M_w auf x

Nach VL ist die Codierung dieser TM berechenbar

Graphisch:



Ist $w\#x \in HP$, dann hält M_w auf $x \Rightarrow M_{w'}$ hält auf jedem Input $\Rightarrow w' \in$ TOTALITY

Ist $w' \in$ TOTALITY, muss die Simulation von M_w auf x zwangsweise halten $\Rightarrow w\#x \in HP$

4) $\overline{HP_\varepsilon} \leq TOTALITY$

Suche $f: w \mapsto w'$ mit

$$w \in \overline{HP_\varepsilon} \Leftrightarrow w' \in TOTALITY$$

Problem: Ist $w \in \overline{HP_\varepsilon}$, terminiert M_w auf ε nicht.
Damit erhalten wir kein output, mit dem wir arbeiten können.

$\overline{HP_\varepsilon}$ etwas anders:

$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}}$: M_w hält auf ε nicht nach i Schritten.

↳ Länge des Eingabewortes für $M_{w'}$

Betrachte folge Maschine $M_{w'}$ mit Eingabe x:

1. Berechne $i = |x|$
2. Simuliere M_w auf ε für ~~i~~ i Schritte
3. ~~Akzeptiert~~ ~~H~~ Hält M_w nach i Schritten, gehe in Endlosschleife
4. Ansonsten halte.

Ist $w \notin$ ~~$ACCEPT_\varepsilon$~~ $\overline{HP_\varepsilon}$, dann ex. $i \in \mathbb{N}$, sodass M_w auf ε nach i Schritten hält. Dann wird aber $M_{w'}$ für Eingabewörter $x \in \Sigma^{\geq i}$ in eine Endlosschleife gehen $\Rightarrow$ ~~\$~~ $w' \notin TOTALITY$.

$w' \notin TOTALITY$, dann kann $M_{w'}$ nur in eine Endlosschleife geraten, wenn $\exists x \in \Sigma^*$: Sim von M_w auf ε mit $|x|$ Schritten terminiert.
Also ist $w \notin ACCEPT$. $\square$