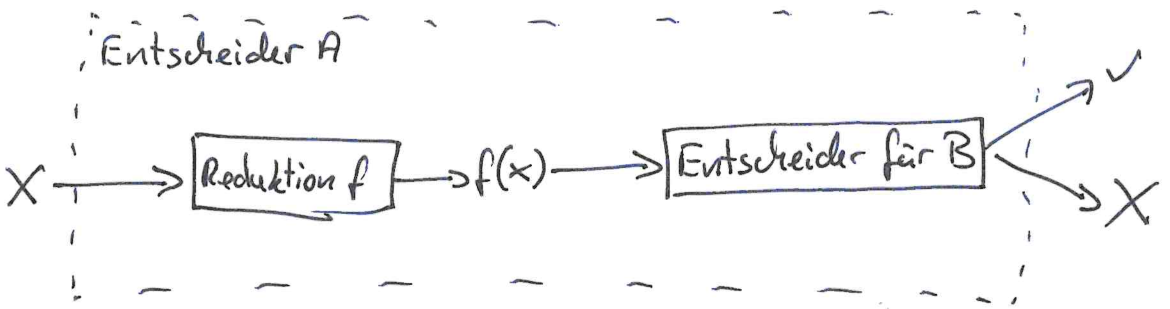
Letztes Mal:
(SELF)-ACCEPT ist nicht entscheidbar

Kann diese Information genutzt werden, um Unentscheidbarkeit anderer Sprachen zu zeigen?

Bspw. könnte man zeigen, dass ACCEPT in irgendeiner Weise in einer neuen Sprache eingebettet ist.
Transformiere Sprache über eine Funktion f.



Wenn man Wörter $x \in A$ zu Wörtern $f(x) \in B$ transformieren kann, dann muss es einen Entscheider für A geben, wenn es für B einen Entscheider gibt. Oder: Gibt es keinen Entscheider für A, kann es auch keinen für B geben!

Wichtig für f: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Formal:

Definition 4.12

Seien $A \subseteq \Sigma_1^*$, $B \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen. Eine Funktion $f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ heißt (Many-One-)Reduktion von A auf B, wenn sie total und berechenbar ist und für alle $x \in \Sigma_1^*$

$f(x) \neq \text{undef} \ \forall x \in \Sigma_1^*$

gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Wir schreiben auch $A \leq B$.

Lemma 4.13

Wenn $A \leq B$ gilt und B ist (semi-)entscheidbar, dann ist auch A (semi-)entscheidbar.

Beweis

Sei B entscheidbar; f eine Reduktion von A auf B; M_f eine TM, die f berechnet; sowie M_B eine TM, die B entscheidet.

Konstruiere Entscheider M_A für A wie folgt:

Eingabe $x \in \Sigma_1^*$

1. Berechne $f(x)$ durch Simulation von M_f
2. Simuliere M_B auf $f(x)$

Da M_f und M_B immer terminieren, terminiert auch M_A immer. Wegen $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ ist M_A auch ein Entscheider für A.

$\square$

Analog für Semi-Entscheidbarkeit

Korollar 4.14

Wenn $A \leq B$ und A ist nicht (semi-)Entscheidbar, dann ist auch B nicht (semi-)Entscheidbar.

Weiteres Problem:

Akzeptanz des leeren Wortes ($ACCEPT_\varepsilon$)
Gegeben: TM M
Frage: Akzeptiert M die Eingabe ε?

Formal als Sprache:

$$ACCEPT_\varepsilon = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varepsilon \in \mathcal{L}(M_w)\}$$

Lemma 4.17:
$ACCEPT \leq ACCEPT_\varepsilon$

Beweis
Wir benötigen eine Reduktion $f: w\#x \mapsto w'$, d.h. wir müssen überlegen, was eine TM $M_{w'}$ mit $\langle M_{w'}\rangle = w'$ berechnen soll.

$M_{w'}$ führt folgende Schritte durch:

1. Ignorie die Eingabe (z.B. durch Löschen).
2. Schreibe x auf das Eingabeband. ← "Hardcoded" über Zustände
3. Simuliere M_w auf x.

Nun zu zeigen:
a) f ist total und berechenbar
b) $w\#x \in ACCEPT \iff w' \in ACCEPT_\varepsilon$

Zu a):
Zu jedem $w\#x$ konstruieren wir ein w' $\Rightarrow f$ ist total
f ist auch berechenbar: Wir müssen nur die TM codieren,

die obige Schritte umsetzt.
Schritte 1 und 2 sind klar; für Schritt 3 können wir die UTM $\mathcal{U}$ mit Eingabe $w\#x$ nutzen.

Zu b):

"$\Rightarrow$": Wenn $w\#x \in ACCEPT$, dann akzeptiert M_w Eingabe x. Nach Konstruktion akzeptiert $M_{w'}$ alle Eingaben, also auch ε. Damit ist $w' \in ACCEPT_\varepsilon$

"$\Leftarrow$": Ist $w\#x \notin ACCEPT$, dann weist $M_{w'}$ in Schritt 3 immer ab, d.h. $\mathcal{L}(M_{w'}) = \emptyset$, also auch $\varepsilon \notin \mathcal{L}(M_{w'})$. Damit ist $w' \notin ACCEPT_\varepsilon$. $\square$

Theorem 4.18

Folgende Probleme sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

a) Das Halteproblem

$$HP = \{w\#x \in \{0,1\}^*\#\{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$$

b) Das spezielle Halteproblem

$$\text{SELF-HP} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$$

c) Das Halteproblem auf der leeren Eingabe

$$HP_\varepsilon = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } \varepsilon\}$$

Beweis

Beispielhaft für

a) Semi-Entscheidbarkeit von HP

b) Unentscheidbarkeit von HP_ε

Zu a):

Zeige $HP \leq ACCEPT$ $\Rightarrow$ ACCEPT ist semi-entsch. $\Rightarrow$ HP semi-entsch.

Definiere Reduktion $f: w\#x \mapsto w'\#x'$.

Setze dazu $x' = x$ und w' als Codierung der TM $M_{w'}$, die wiefolgt arbeitet:

1. Simuliere M_w auf der Eingabe
2. Akzeptiere, wenn M_w hält (egal ob M_w das Eingabewort akzeptiert oder abweist)

Diese Funktion ist total und berechenbar.
Für w' müssen nur q_{acc} und q_{rej} in w zu q_{acc} in w' geändert werden.

Außerdem gilt $w\#x \in HP \Leftrightarrow f(w\#x) = w'\#x' \in ACCEPT$:

"$\Rightarrow$" Ist $w\#x \in HP$, dann hält M_w auf x und damit akzeptiert $M_{w'}$ das Wort x. Damit ist $w'\#x' \in ACCEPT$

"$\Leftarrow$" Implikationen gelten auch andersherum. $\square$

Zu b)

Zeige $ACCEPT_\varepsilon \leq HP_\varepsilon$

Definiere $f: w \mapsto w'$ wie folgt.

Die TM $M_{w'}$ mit $\langle M_{w'} \rangle = w'$ arbeitet wie folgt:

1. Simuliere M_w auf Eingabe
2. Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiere (und halte)
3. Wenn M_w abweist, gehe in eine Endlosschleife.

f ist total und berechenbar; q_{rej} in M_w wird ~~letztlich~~ letztlich durch eine Endlosschleife ersetzt.

Bleibt zu zeigen: $w \in ACCEPT_\varepsilon \Longleftrightarrow w' \in \cancel{ACCEPT}\ HP_\varepsilon$

"$\Rightarrow$": Ist $w \in ACCEPT_\varepsilon$, dann akzeptiert M_w das Wort ε. Dann akzeptiert $M_{w'}$ auch ~~auf~~ ε und hält.
$\Rightarrow M_{w'} \in HP_\varepsilon$

"$\Leftarrow$": Ist $w \notin ACCEPT_\varepsilon$, dann weist M_w ε ab, oder geht in eine Endlosschleife. Im letzteren Fall bleibt die Simulation in Endlosschleife; im ersten Fall geht $M_{w'}$ über Schritt 3 in eine Endlosschleife. $\Rightarrow w' \notin HP_\varepsilon$

$\square$

Implikation

Es gibt kein Programm (egal welche Programmiersprache), welche überprüft bzw entscheidet:

- ob ~~das~~ ein Programm ~~term~~ auf bestimmten Eingaben terminiert
- ob ~~das~~ ein Programm korrekt auf bestimmten Eingaben arbeitet.