Theo 2 – VL 6

Beweis Theorem 3.23
(Skizze)

"$\Rightarrow$" Ist $A = \emptyset$, konstruiere Turing Maschine, die sofort abweist $\Rightarrow$ $A = \emptyset$ sogar entscheidbar!

$A \neq \emptyset$: Konstruiere TM, die folgendes umsetzt.

Eingabe $w \in \Sigma^*$
for $i = 0, 1, \dots$ do
   Berechne $v = f(i)$
   Akzeptiere, falls $v = w$

Korrektheit selbst!

"$\Leftarrow$" $A = \emptyset$ ist nichts zu tun $\Rightarrow$ $A \neq \emptyset$

Suche Funktion $f: \mathbb{N} \to A$, also einen Aufzählungsalgo!

Zunächst:

a) A semi-entscheidbar $\Rightarrow$ $\exists$ TM M, die A semi-entscheidet

b) $\forall w \in A$ hält M nach $T(w)$ Schritten

c) $\forall i \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Wörter in $A \subseteq \Sigma^*$ mit $\leq i$ Buchstaben

d) Jedes $w \in A$ ist endlich!

e) Σ^* ist aufzählbar!
   $\Rightarrow$ Sei $w_0, w_1, w_2, \dots$ eine Aufzählung von Σ^*

Schritt ~~Frage~~ 1: Wie können wir jedes Wort aus A mind. 1x ausgeben?

```
1. for i=1,2,3,... do
2.    for j=0,1,...,i do
3.       Berechne w_j ∈ Σ*                    → Punkt e)
4.       if M akzeptiert w_j nach ≤ i Schritten
5.          gib w_j aus
```

Endliche Laufzeit!

Betrachte $w \in A$. Wegen e) existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $w_k = w$.

$\Rightarrow$ Ab $i \geq k$ wird w in Zeilen 3-5 berücksichtigt.

Ab, zusätzlich $i \geq T(w)$ wird w auch ausgegeben.

$\Rightarrow$ Wir geben jedes Wort irgendwann aus.

(Wörter nicht in A werden nicht akzeptiert und somit nicht ausgegeben)

<u>Schritt 2</u>: Wie geben wir das "n-te Wort" aus?

Wichtig: Für $i \neq j$ darf $f(i) = f(j)$ sein!

D.h. es ist egal, ob wir ein Wort bereits für eine kleinere Zahl ausgegeben hatten.

$\Rightarrow$ Algo:

```
Eingabe n ∈ ℕ
m=0
for i=0,1,2,... do
   for j=0,1,2,...,i do
      Berechne w_j ∈ Σ*
      if M akzeptiert w_j nach ≤ i Schritten
         m=m+1
         if m=n
            Gib w_j aus und akzeptiere
```