

Beispiele für überabzählbar unendlich.

1) Betrachte $B = \{ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \}$, die Menge aller abzählbar unendlich langen Binärstrings.

Zeige: B ist überabzählbar unendlich.

Beweis per Widerspruch.

Mapping $f: \mathbb{N} \rightarrow B$
ist bijektiv!

Wir nehmen an, B sei abzählbar unendlich.

Sei $b_i \in B$ mit $i \in \mathbb{N}$. ~~Wir konstruieren~~

Nach Voraussetzung ist $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\} = B$

Wir konstruieren nun ein $b \in B$, sodass kein $j \in \mathbb{N}$ mit $b = b_j$ existiert.

Sei $b_k(k)$ die Binärzahl an Stelle k .

Dann setzen wir $b(k) = ~~b_k(k)~~ 1 - b_k(k) \in \{0,1\}$

Visuell:

| k | b | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

□

Damit haben wir ein b gefunden, dass in B ist, aber nicht in der Aufzählung \neq
 $\Rightarrow B$ ist überabzählbar unendlich.

2) Sei S eine abzählbar unendliche Menge.

Dann ist $P(S)$ überabzählbar unendlich.
 \hookrightarrow Potenzmenge

Beweis per Widerspruch!

Sei $P(S)$ abzählbar unendlich.

Sei $s_1, s_2, \dots \in P(S)$ eine Aufzählung
und $s_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k\text{-tes Element in } S \text{ nicht in } s_i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

Definiere $s(k) = 1 - s_k(k) \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow \nexists j \in \mathbb{N}$ mit $s = s_j$, aber $s \in P(S) \neq$

$\Rightarrow P(S)$ ist überabzählbar unendlich.