Technische
Universität
Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Kapitel 2 – Komplement kontextsensitiver Sprachen

Nächstes Kapitel

Theorem 2.1 (Immerman & Szelepcsényi, 1988 &1987)
Wenn eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ kontextsensitiv ist, dann ist auch ihr Komplement $\overline{\mathcal{L}}$ kontextsensitiv.

Beweisidee:
Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$ für eine Typ-1-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$.

Konstruiere einen NLBA, welcher ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ akzeptiert, falls es **keine Ableitung** $S \Rightarrow_G^* w$ in der Grammatik G gibt.

Wir wollen also prüfen, ob vom Wurzelknoten des **Ableitungsgraphen** das Wort w erreicht werden kann.

Ableitungsgraph

Definition 2.2
Der **Ableitungsgraph** $\text{Graph}_{|w|}$ zu einer Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ und einem Wort $w \in \Sigma^*$ hat

- Als Knotenmenge die Menge der Satzformen der Länge $\leq |w|$ und
- Die Kanten sind durch die Ableitungsrelation $\Rightarrow_G$ gegeben.

Formal:

$$\text{Graph}_{|w|} = \left((\Sigma \cup N)^{\leq |w|}, \{(a, b) | \; a \Rightarrow_G b\} \right)$$

Damit können wir folgende Aussage direkt festhalten:
Es gibt genau dann **keine** Ableitung $S \Rightarrow_G^* w$, wenn es keinen Pfad von S zu w in $\text{Graph}_{|w|}$ gibt.

Was ist zu tun?

Entwirf einen nicht-deterministischen Algorithmus (bzw. NTM)

- Gegeben: Ein Graph G (bei uns $\text{Graph}_{|w|}$) und zwei Knoten s und t (bei uns Startsymbol S und w)
- Entscheide, ob es keinen Pfad von s nach t gibt.

Benötige dabei nur logarithmisch viel Platz in der Größe von G.

- Dann ist die NTM auch ein NLBA, denn
- $O(\log G) = O(|w|)$, also linear in der Länge von w.

Idee 1:

$$\text{Graph}_{|w|} = \left((\Sigma \cup N)^{\leq |w|}, \{(a,b) \mid a \Rightarrow_G b\} \right)$$

Wir wollen einen NLBA konstruieren, der Graph ist aber exponentiell groß in $|w|$...

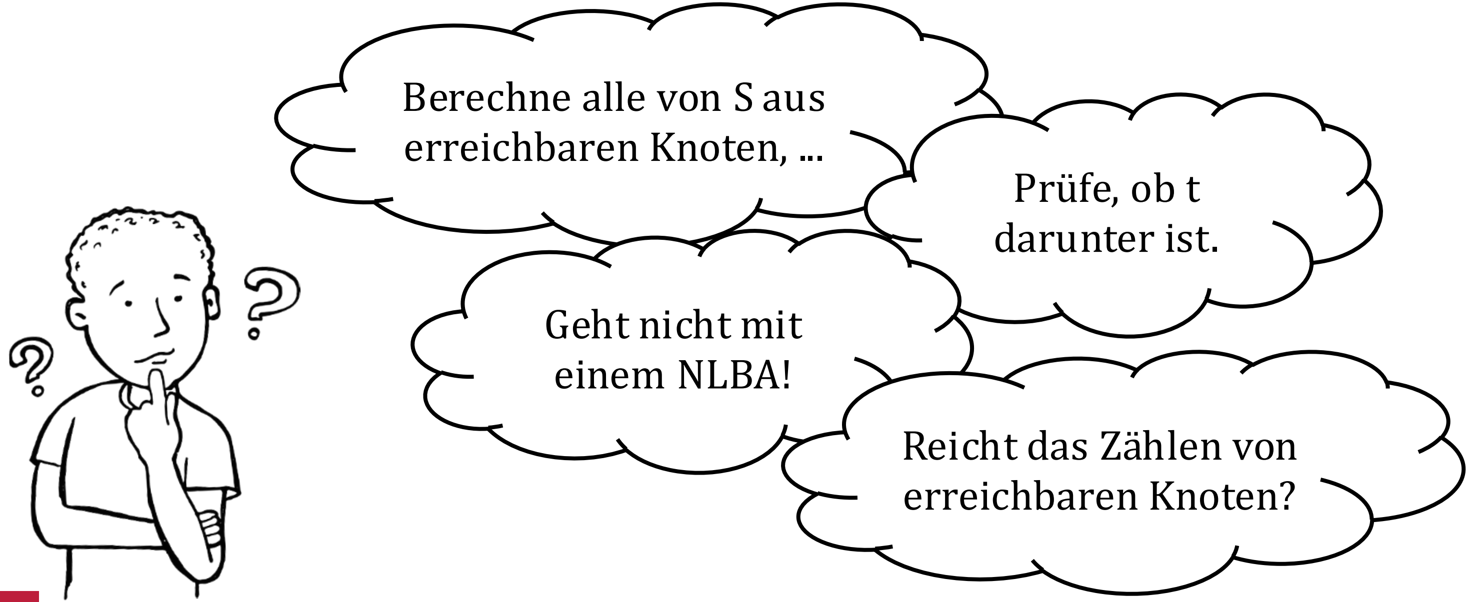
Aber: Jeder Pfad hat maximal Länge $|w|$.

Können wir einen Pfad raten und prüfen, ob dieser nicht gültig ist?

Das Problem: **Jede** Auswahl von geratenen Pfaden darf nicht gültig sein!

Idee 2:

$$\text{Graph}_{|w|} = \left(\, (\Sigma \cup N)^{\leq |w|}, \{(a,b) \mid a \Rightarrow_G b\} \right)$$



UNREACH(G,s,t)

Lemma 2.4
Sei N initialisiert mit der Anzahl der von s aus erreichbaren Knoten. Es gibt eine Berechnung zum nicht-deterministischen Algorithmus, die $\textit{UNREACH}(G, s, t)$ true zurück gibt, genau dann wenn es keinen Pfad von s nach t gibt.

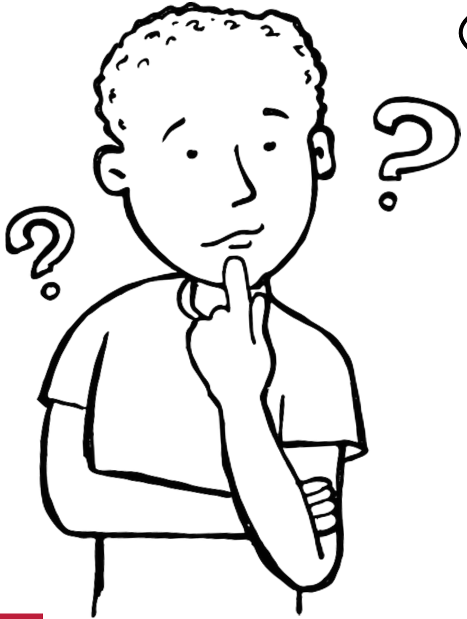
Beweis: Algorithmus gibt nur dann true zurück, wenn wir genau die erreichbaren Knoten als erreichbar raten.

- Knoten unerreichbar: Pfad Verifikation schlägt immer fehl. (Zeile 4/7)
- Zu wenig Knoten als erreichbar geraten: Überprüfung der Anzahl scheitert (Zeile 15)

Ist t nicht erreichbar, ergibt genau diese Berechnung true.

Gibt es eine Berechnung, die true zurückgibt, kann t nicht erreichbar sein:
Alle erreichbaren Knoten sind identifiziert und t war nicht darunter.
Sonst hätten wir false zurückgegeben (Zeile 9/10).

Zählen von erreichbaren Knoten



Wie können wir die
Zahl N bestimmen?

Können wir die Idee von
unreach nutzen und die
Zahl induktiv bestimmen?

Nächstes Mal

Was kann man alles berechnen und entscheiden?