Theorem 1.9 (Alphabetreduktion)

Beweisskizze:

Wir suchen eine Funktion $bin: \Gamma^* \to \{0,1\}^*$ und eine TM M_{bin} wie definiert.

Fragen dazu:
1. Wie Codieren wir jedes Symbol in Γ?
2. Wie simulieren wir M mit M_{bin}?

Zu 1.: Jedes Symbol lässt sich durch $k = \lceil \log_2(|\Gamma|) \rceil$ bits codieren.
Wichtig: k ist eine Konstante für eine fixe TM M.

Zu 2.: M_{bin} arbeitet wie folgt.
1. Lese k bits ab der aktuellen Kopfposition und speichere diese im Kontrollzustand
2. Wähle passende Transition von M für aktuellen Kontrollzustand, sowie das durch die k Bits kodierte Symbol aus.
3. Ersetze die eingelesenden Bits durch die k Bits des neuen Symbols
4. Bewege Kopf k Schritte nach L/R, oder bleib stehen.
5. Ändere Kontrollzustand.

$\square$

Def. 1.12 (LBA)

Ein linear-beschränkter Automat (LBA) ist eine NTM $M = (Q, \Gamma, \Sigma \dot\cup \underline{\{\$_L, \$_R\}}, q_0, \delta, Q_F)$.

Endmarker links und rechts.
Ersetzen Blank-Symbole.

Dabei gilt:

1. $\forall q \in Q : \nexists (q', \$_L, L) \in \delta(q, \$_L)$
   $\forall q \in Q : \nexists (q', \$_R, R) \in \delta(q, \$_R)$
   } überschreite Endmarker nicht!

2. $\forall q \in Q : \nexists (q', a, d) \in \delta(q, \$)$ mit $a \in \Gamma$, $\$_L \neq a \neq \$_R$ und $d \in \{L, N, R\}$
   } Endmarker nicht überschreiben!

Damit ist

$$\mathcal{L}(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid q_0 \$_L w \$_R \longrightarrow^* u q v \in \Gamma^* Q_F \Gamma^* \}$$

Beweis Theorem 1.14 (Ideen!)

"$\Leftarrow$" Konstruiere LBA wie folgt:

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ rate nicht-deterministisch Produktion $\alpha \to \beta \in P$ und suche nicht-deterministisch nach β auf dem Band.

Ersetze β mit α und schließe ggf. Lücken.

Steht letztlich nur S auf dem Band, akzeptiere.

"$\Rightarrow$" Betrachte LBA $M = (Q, \Gamma, \Sigma \cup \{\$_L, \$_R\}, q_0, \delta, Q_F)$

Idee: Halte über Nicht-Terminale fest, welche Konfiguration ~~im~~ M statt-findet und auf welchem Wort M initial arbeitet.

Formal, sei

$$\Delta = \underbrace{\Gamma \cup (\{\$_L, \$_R\} \times \Gamma)}_{\substack{\Delta' \\ = \\ \text{Darstellung des aktuellen Zeichens,} \\ \text{Kopf woanders}}} \cup \underbrace{(Q \times \Delta')}_{\substack{\text{Position des} \\ \text{Kopfes auf} \\ \text{einem Zeichen}}} \cup \underbrace{(\{\$_L, \$_R\} \times Q \times \Gamma)}_{\substack{\text{Position des Kopfes} \\ \text{auf einem Endmarker}}}$$

<u>Bsp</u>: Konf. $\$_L\, x\, q\, y\, a\, z\, \$_R$ mit Initialwort aabb

erzeugt Satzform

$$\Big((\$_L, x), a\Big) . \Big((q, y), b\Big) . \Big(a, a\Big) . \Big((\$_R, z), b\Big)$$

Codiere nun δ über Produktionen

Bspw:

$(q', b, R) \in \delta(q, a)$ wird zu

$$((q,a),x).(c,y) \to (b,x).((q',c),y)$$

für $c \in \Gamma$, $x, y \in \Sigma$.

Hinzu kommen Produktionen für "den Start" $\$ q_0 w \$$

$\to$ Erzeuge zuerst Satzform $((q_0, \$_L), a).(b,b). \ldots .((\$_R, c), c$

mit $a, b, c \in \Sigma$

und für "das Ende" unter anderem

$((q_F, a), b) \to b$ oder $(a,b) \to b$ Auflösen zu Terminal

Beachte dabei Sonderfälle mit den Randmarkern $\square$