Theoretische Informatik 2

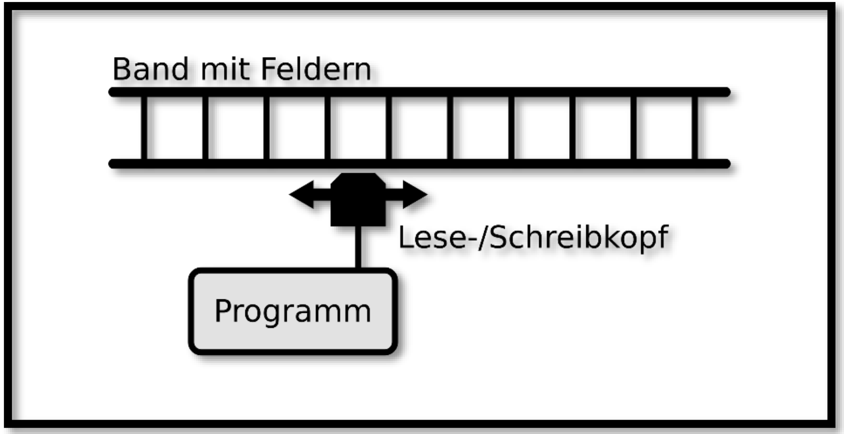
Arne Schmidt

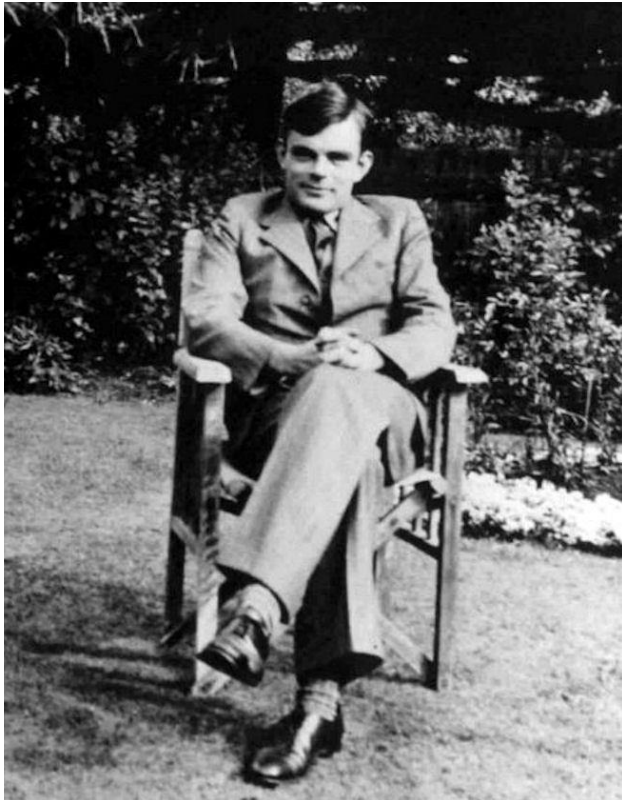
Kapitel 1.1 – Turing-Maschinen

Alan Turing (1912-1954)

Logiker, Mathematiker, Kryptoanalytiker, Informatiker

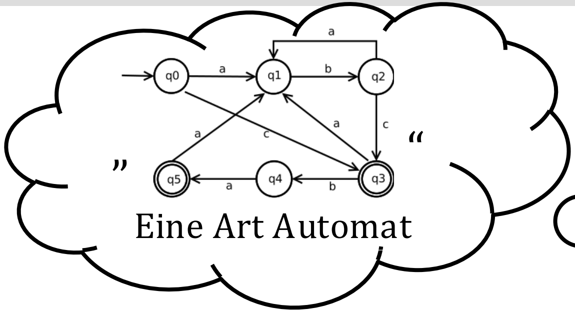
Berechenbarkeitsmodell Turing-Maschine





Church-Turing-These:
„Alles, was sich intuitiv berechnen lässt, lässt sich mit einer Turing-Maschine berechnen.“

Turing-Maschine – Intuition



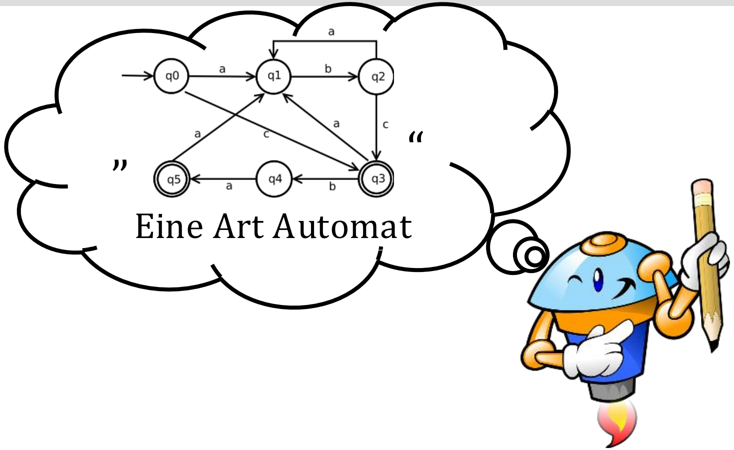
Aha! Eine 1!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine 0 stehen.

Danach schaue ich mir die Zelle links daneben an.

	?	?	?	?	1	?	?	?	?	

Turing-Maschine – Intuition

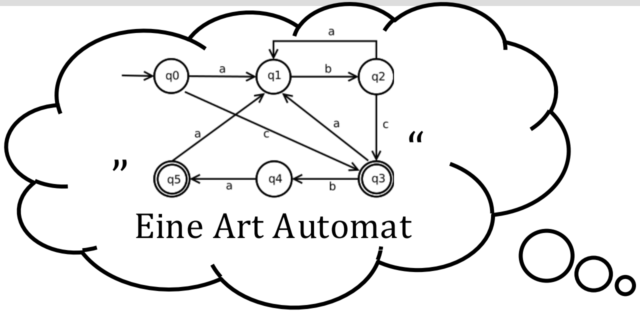


Aha! Eine 1!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine 1 stehen.

Danach schaue ich mir die Zelle rechts daneben an.

	?	?	?	1	0	?	?	?	?	



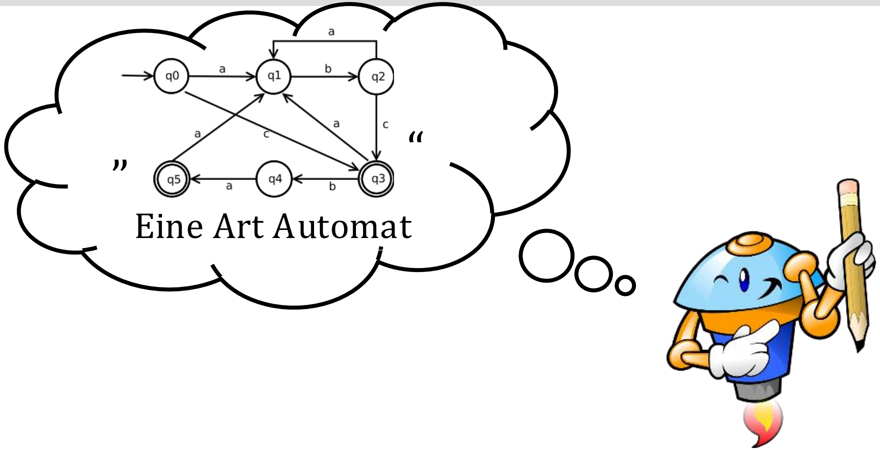
Aha! Eine 0!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine 1 stehen.

Danach halte ich an.

	?	?	?	1	0	?	?	?	?		

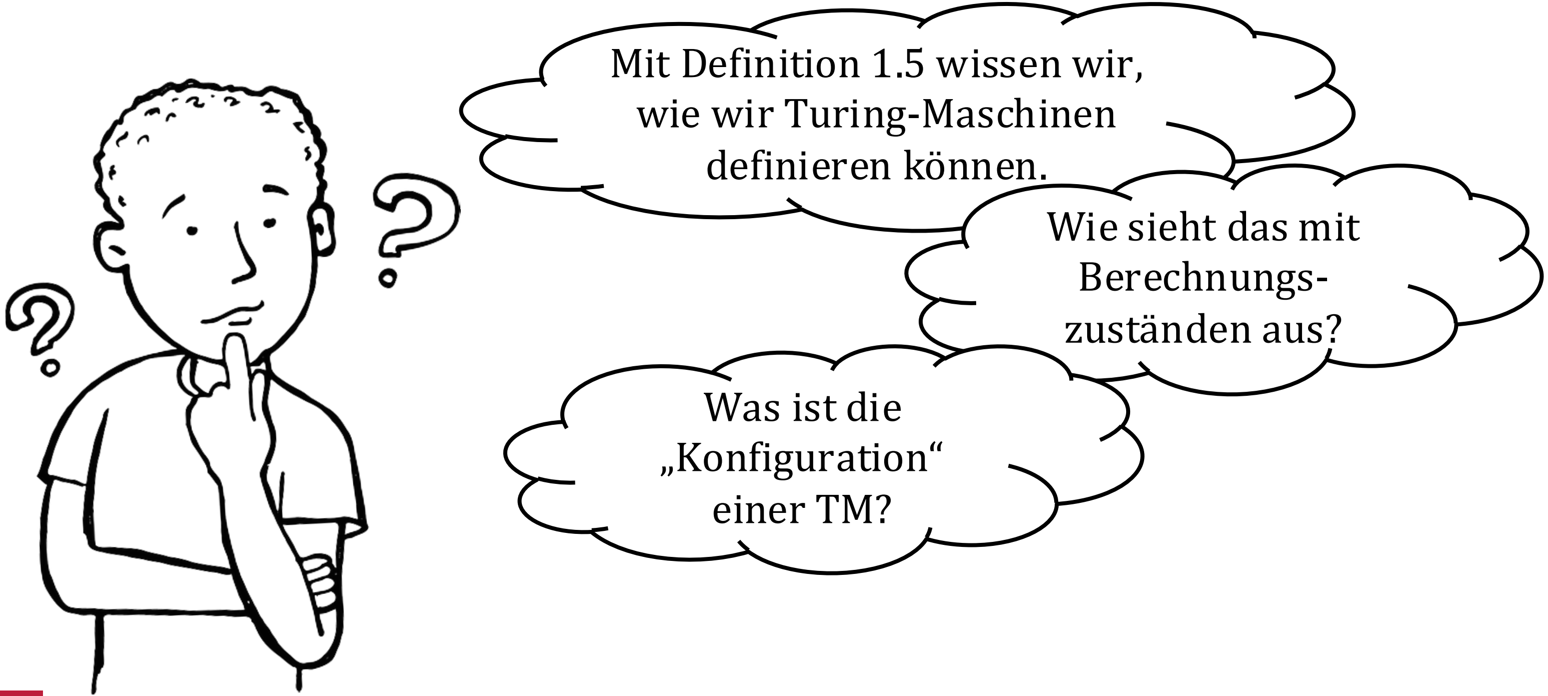
Turing-Maschine – Intuition



	?	?	?	1	1	?	?	?	?	

Der „Roboter“ kann also: Lesen, schreiben, bewegen und seinen Zustand ändern!

Fragen


Mit Definition 1.5 wissen wir, wie wir Turing-Maschinen definieren können.
Wie sieht das mit Berechnungs-zuständen aus?
Was ist die „Konfiguration“ einer TM?

Konfiguration

Intuitiv:
Was ist der Gesamtzustand der TM?

- In welchem Zustand befinden wir uns?
- Wo steht welches Zeichen?
- Wo steht der Kopf?

Aha! Eine 0!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine 1 stehen.

Danach halte ich an.

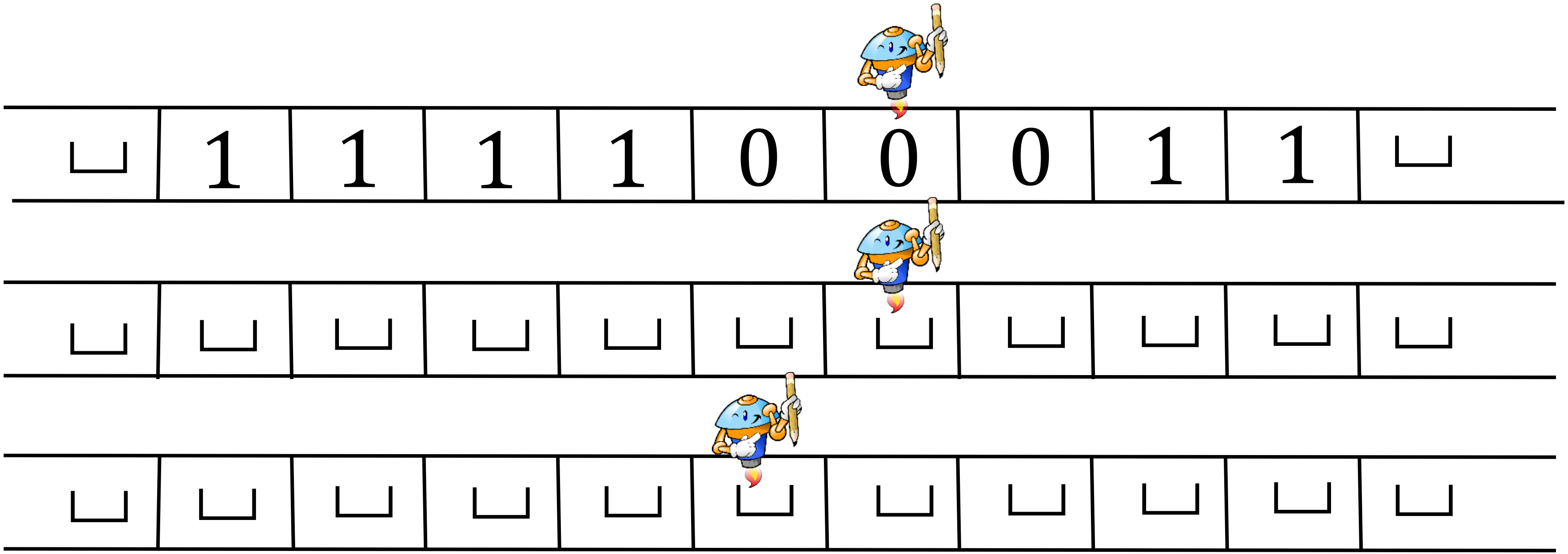
$\delta(q, 0) = (q_F, 1, N)$ mit $q_F \in Q_F$

␣	0	1	1	1	0	0	0	1	1	␣

Position... 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...

Kapitel 1.2 – Varianten von Turing-Maschinen

Mehrband Turing-Maschinen



Mehrband Turing-Maschinen

Definition 1.7
Sei $k \in \mathbb{N}, k > 0$. k-Band-Turing-Maschinen sind analog zu Turing-Maschinen definiert, besitzen allerdings k Bänder mit einem Kopf pro Band. Damit gilt für die Transitionsfunktion:

$$\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \to \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \times \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{N}\}^{\boldsymbol{k}} \text{ für det. } k\text{-Band-Turing-Maschinen}$$

Bzw.

$$\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \to \mathcal{P}\left(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \times \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{N}\}^{\boldsymbol{k}}\right) \text{ für nicht det. } k\text{-Band-Turing-Maschinen}$$

Die Maschine liest in jedem Schritt jedes Band ein, modifiziert die Zellen und bewegt die Köpfe unabhängig voneinander.

In der Initialkonfiguration sind alle Bänder außer dem Ersten leer, d.h. gefüllt mit … ⊔⊔⊔⊔ …

Mächtigkeit von Mehr-Band-Turing-Maschinen

Mächtigkeit von Mehr-Band-Turing-Maschinen

Band- und Alphabetreduktionen

Lemma 1.8 (Bandreduktion)
Zu jeder k-Band-Turing-Maschine M_k gibt es eine Turing-Maschine M, die M_k effizient simuliert. Insbesondere gilt $\mathcal{L}(M_k) = \mathcal{L}(M)$. Falls M_k deterministisch ist, dann ist auch M deterministisch.

Lemma 1.9 (Alphabetsreduktion)
Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$ eine TM. Es gibt eine Abbildung
bin: $\Gamma^* \to \{0,1\}^*$
und eine TM $M_{\text{bin}} = (Q', \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \sqcup, q_0', \delta', Q_F')$ mit
$w \in \mathcal{L}(M) \subseteq \Sigma^* \Leftrightarrow \text{bin}(w) \in \mathcal{L}(M_{\text{bin}}) \subseteq \{0,1\}^*$

Wenn M ein Entscheider ist, dann ist auch M_{bin} ein Entscheider.

Einseitig beschränktes Band

Definition 1.10
Turing-Maschinen mit rechts unendlichem Band sind weitestgehend definiert wie Turing-Maschinen mit beidseitig unendlichem Band, mit folgenden Ausnahmen:

- Ein zusätzliches Symbol $\$ \in \Gamma$, den (linken) Endmarker mit $\$ \notin \Sigma$ und $\$ \neq \sqcup$.
- Der Endmarker darf weder nach links überschritten werden, noch darf er überschrieben werden:
$$\forall q \in Q \ \ \forall q' \in Q : \ \delta(q, \$) \ = \ (q', \$, R)$$
- Die Startkonfiguration bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist $q_0\$w$, wenn q_0 der Startzustand ist.

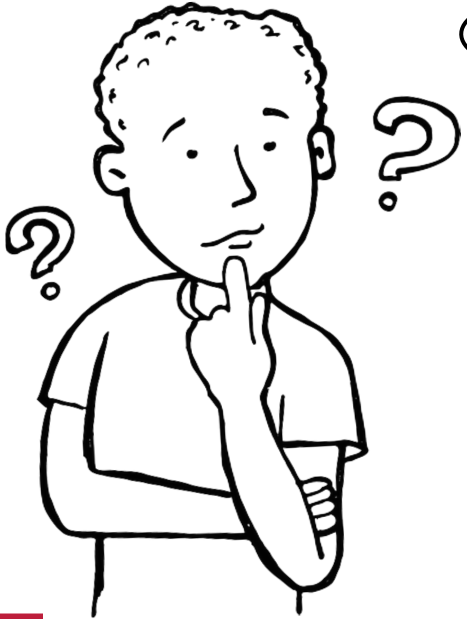
Insbesondere sind die Sprachen von TMs mit rechts unendlichem Band analog definiert wie bei TMs mit beidseitig unendlichem Band.

Einseitig beschränktes Band

Lemma 1.11
Zu jeder TM $M_{\leftrightarrow}$ mit beidseitig unendlichem Band gibt es eine TM M mit rechts unendlichem Band, die $M_{\leftrightarrow}$ effizient simuliert. Insbesondere gilt $\mathcal{L}(M_{\leftrightarrow}) = \mathcal{L}(M)$.

Beweisskizze: Selbst.

Nächstes Kapitel



Was erkennen diese Turing-Maschinen?

Können wir TMs weiter einschränken?