

## Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 06.07. um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik zwischen Raum IZ 337 und IZ 338. Beschrifte deine Abgabe mit Namen, Matrikelnummer. Achtet darauf, die Abgabe in das mit der korrekten Übungsgruppe beschriftete Fach zu legen. Andernfalls wird die Abgabe unter Umständen nicht gewertet.

**Pflichtaufgabe 1 (Klasse NL):** (6 Punkte)  
Betrachte das Problem *sut*-Path:

**Gegeben:** Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  und drei Knoten  $s, u, t \in V$ .

**Frage:** Gibt es einen Pfad von  $s$  nach  $u$ , sowie  $u$  nach  $t$ ?

- Zeige: *sut*-Path  $\leq_m^{\log}$  PATH
- Zeige: PATH  $\leq_m^{\log}$  *sut*-Path

**Pflichtaufgabe 2 (2SAT):** (5 Punkte)  
Betrachte folgende 2SAT-Instanz.

$$(x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_5 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4)$$

Bestimme eine erfüllende Belegung für die Instanz mit dem Algorithmus aus der Vorlesung:

- Zeichne den zur Formel gehörigen gerichteten Graphen.
- Halte fest, welche Variable für eine Iteration gewählt wird und liste auf, welche Variablen in dieser Iteration auf true bzw. false gesetzt werden.

Kommen zu einem Zeitpunkt mehrere Variablen für die nächste Iteration in Frage, wähle diejenige mit dem kleinsten Index. Kann eine Variable sowohl positiv, als auch negativ gewählt werden, setze sie auf false.

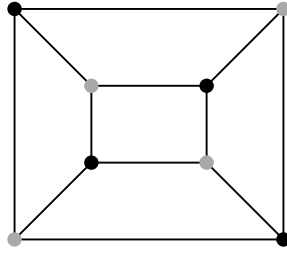
**Pflichtaufgabe 3 (2-Färbbarkeit):** (6 Punkte)  
Betrachte folgendes Problem 2-COLORING.

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E)$ .

**Frage:** Existiert Funktion  $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ , sodass  $c(u) \neq c(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt?

Siehe Abbildung 1 für ein Beispiel.

Zeige: 2-COLORING  $\leq_m^{\log}$  2SAT.



**Abbildung 1:** Ein Graph mit einer 2-Färbung. Schwarze Knoten entsprechen  $c(v) = 1$ , graue Knoten entsprechen  $c(v) = 0$ .

**Pflichtaufgabe 4 (NP-Vollständigkeit):**

**(3+6 Punkte)**

Betrachte folgende drei Probleme für einen gegebenen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  und eine gegebene Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .

**Independent Set (IS)** Existiert eine Menge  $IS \subseteq V$  und  $|IS| = k$ , sodass

$$\forall v, w \in IS : \{v, w\} \notin E?$$

**Vertex Cover (VC)** Existiert eine Menge  $VC \subseteq V$  und  $|VC| = k$ , sodass

$$\forall \{v, w\} \in E : v \in VC \vee w \in VC?$$

**Clique (C)** Existiert eine Menge  $C \subseteq V$  und  $|C| = k$ , sodass

$$\forall v, w \in C, v \neq w : \{v, w\} \in E?$$

- a) Zeige: Alle drei Probleme liegen in NP.
- b) Zeige: Ist eines der Probleme NP-schwer bzgl. log-Space-Reduktionen, dann sind alle drei Probleme NP-schwer bzgl. log-Space-Reduktionen.