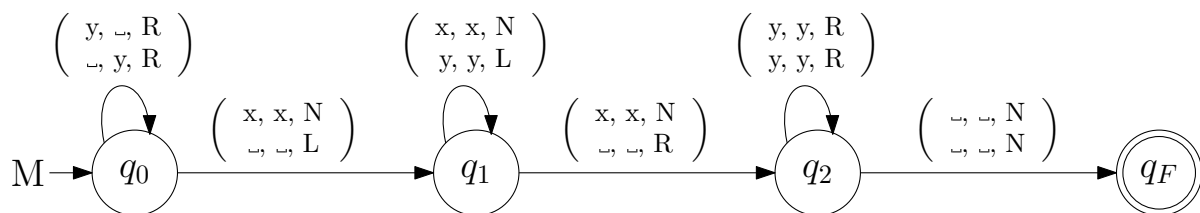


## Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 18.05. um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik zwischen Raum IZ 337 und IZ 338. Beschrifte deine Abgabe mit Namen, Matrikelnummer. Achtet darauf, die Abgabe in das mit der korrekten Übungsgruppe beschriftete Fach zu legen. Andernfalls wird die Abgabe unter Umständen nicht gewertet.

**Pflichtaufgabe 1 (Turing-Machine):** **(8 Punkte)**

Betrachte die 2-bandige NTM  $M = (Q, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \sqcup, \delta, q_0, \{q_F\})$  mit  $Q$  und  $\delta$  wie in Abbildung 1 zu sehen. Dabei sind  $y \in \{0, 1\}$  und  $x \in \{0, 1, \sqcup\}$  beliebig. Ist ein Übergang nicht definiert, bleibt die Maschine stecken.



**Abbildung 1:** Eine nicht-deterministische Turing-Maschine.

- a) Zeichne den Berechnungsgraphen von  $M$  zum Wort 0101. Beachte dabei folgende Punkte:
- Verwende als Knoten die Konfigurationen der Maschine.
  - Eindeutige Berechnungspfade, die im selben Zustand bleiben, dürfen zusammengezogen werden. Markiere zusammengezogene Pfade mit einem Stern (\*).
  - Markiere Knoten, in denen die Maschine stecken bleibt mit einem X. Markiere einen akzeptierenden Knoten mit einem Haken (✓)
- b) Bestimme die akzeptierte Sprache  $\mathcal{L}(M)$  von  $M$ , und gib eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise an. Beschreibe dabei kurz die „Aufgaben“ der einzelnen Zustände.

**Pflichtaufgabe 2 ((Über)abzählbar unendliche Mengen):** **(6 Punkte)**

Bestimme für folgende Mengen, ob sie abzählbar oder überabzählbar unendlich sind. Wenn sie abzählbar sind, beweise dies über eine Aufzählung. Wenn sie überabzählbar sind, beweise dies mit Hilfe des Diagonalarguments.

a)

$$\mathcal{L}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0, 1\}^n)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{P}$  die Potenzmenge und  $\{0, 1\}^n$  die Menge aller Binärwörter mit exakt  $n$  Zeichen.

b)

$$\mathcal{L}_2 = \{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid w \in L \Rightarrow w^R \in L\}$$

Dabei bezeichnet  $w^R$  das Wort, welches durch Umkehrung der Reihenfolge der Zeichen von  $w$  entsteht.

**Pflichtaufgabe 3:** **(6 Punkte)**

Seien  $K, L \subseteq \Sigma^*$  entscheidbare Sprachen.

- a) Beweise:  $K \cup L$  ist entscheidbar.
- b) Beweise:  $K \cap L$  ist entscheidbar.
- c) Seien  $u, v \in \Sigma^*$ . Der Shuffle von  $u$  und  $v$  ist die Menge

$$u \diamond v \subseteq \Sigma^*$$

rekursiv definiert durch:

- $u \diamond \varepsilon = \{u\}$
- $\varepsilon \diamond v = \{v\}$
- Für  $u = au'$  und  $v = bv'$  mit  $a, b \in \Sigma$ :

$$u \diamond v = \{aw \mid w \in u' \diamond v\} \cup \{bw \mid w \in u \diamond v'\}$$

Beweise: Der Shuffle  $K \diamond L := \{u \diamond w \mid u \in K, w \in L\}$  ist entscheidbar.