

Übungsblatt 4

Besprechung der Aufgaben am 24.06.26.

Präsenzaufgabe 1 (Minkowski Summe):

Zeichne die Minkowski Summe $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$, gegeben dass

- \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 Einheitskreisscheiben sind.
- \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 Einheitsquadrate sind.
- \mathcal{P}_1 eine Einheitskreisscheibe und \mathcal{P}_2 ein Einheitsquadrat ist.
- \mathcal{P}_1 ein Einheitsquadrat und \mathcal{P}_2 ein Dreieck mit Knoten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ ist.

Hinweis: Die Einheitskreisscheibe ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Einheitsquadrat ist gegeben durch die Knoten $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.

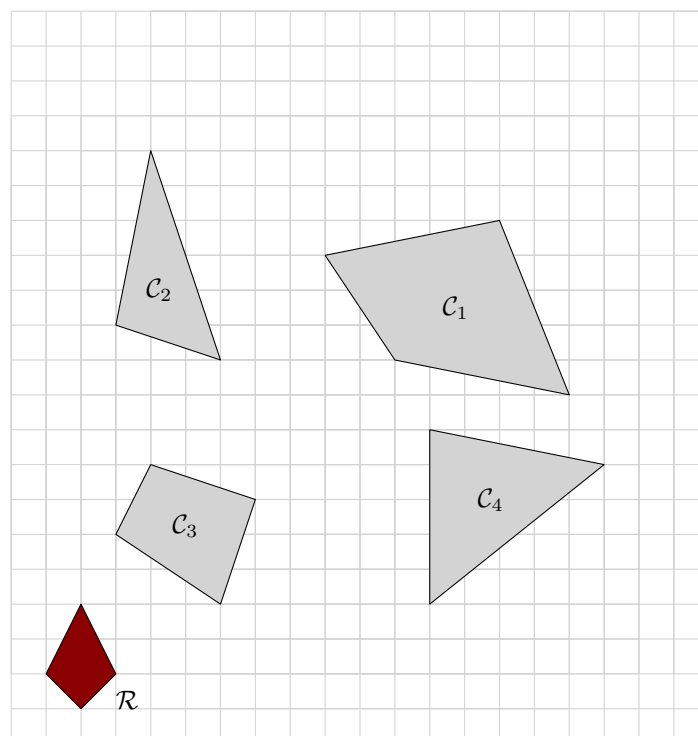


Abbildung 1

Präsenzaufgabe 2 (Configuration-Space):

Betrachte den Work-Space mit Hindernissen $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_4$ in Abbildung 1. Sei zusätzlich $\mathcal{R}(x, y)$ ein entlang des Vektors (x, y) verschobener Roboter, wobei $\mathcal{R}(0, 0)$ das Polygon mit Knoten $(1, 0), (0, 2), (-1, 0), (0, -1)$ ist. Markiere hierzu den freien Configuration-Space in Abbildung 1.

Präsenzaufgabe 3 (Roadmap):

Wir wollen einen Punktroboter im Work-Space aus Abbildung 2 bewegen.

- Zeichne die Roadmap in Abbildung 2 ein.
- Markiere einen Pfad von s nach t auf Basis der Roadmap.

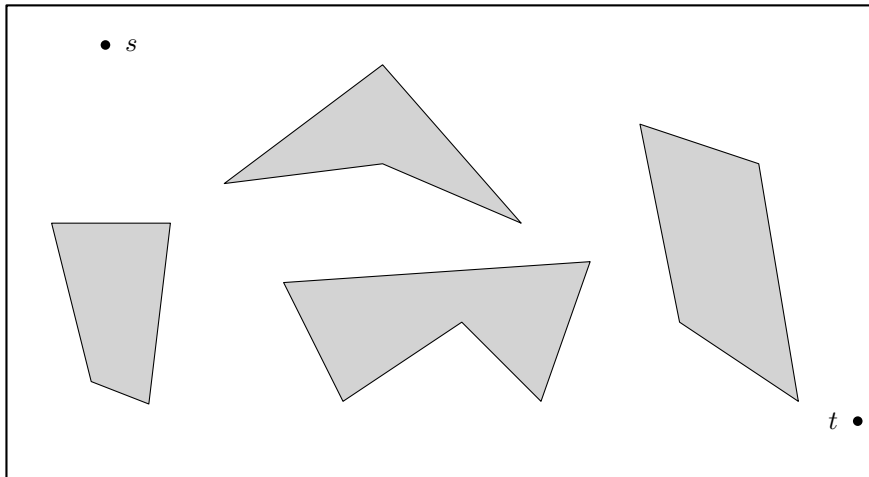


Abbildung 2

Präsenzaufgabe 4 (Tilt Motion Planning):

Wir wollen uns mit einer diskreteren Variante von Motion Planning befassen, in der sich ein Roboter auf einer endlichen Teilmenge des \mathbb{Z}^2 bewegt. Ob ein Roboter eine Position begehen darf sei spezifiziert durch eine (in konstanter Zeit berechenbare) Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Hierbei sind die vom Roboter begeharen Positionen genau jene in $U := \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid f(p) = 1\}$. Erlaubte Bewegungen des Roboters können auf verschiedene Weisen definiert werden:

- Single Step Tilt:* Ein Roboter auf Position p darf sich nur zu seinen begeharen Nachbarpositionen bewegen, d.h. zu Positionen $p \pm (1, 0)$ und $p \pm (0, 1)$, sofern diese in U liegen.
- Full Tilt:* Ein Roboter auf Position p muss sich so weit in eine Richtung bewegen, bis er an eine unbegehare Position stößt, d.h. der Roboter darf sich zum Beispiel zu Position $p + (c, 0)$ bewegen sofern $f(p + (c + 1, 0)) = 0$ und $f(p + (k, 0)) = 1$ für alle $1 \leq k \leq c$. Entsprechend ist die Bewegung in die anderen drei Richtungen definiert.

Wir interessieren uns für das *Erreichbarkeitsproblem* für gegebene Start- und Zielpositionen $s, t \in U$: Entscheide, ob ein Roboter der auf s startet auf t *stehen bleiben* kann.

Zeige: In beiden Modell-Varianten kann das Problem in $O(|U|)$ Zeit entschieden werden.