

6 Mehrdimensionales Packen

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2026

Prof. Dr. Sándor Fekete

Autos, Quader, Rechtecke

Reisezeit!



Die Test-Kandidaten 1 BMW 3er-Touring ◆ 2 Hyundai i30 ◆ 3 Audi A6 Avant ◆ 4 Opel Antara ◆ 5 Peugeot 207 ◆ 6 Fiat Grande Punto ◆ 7 Mercedes B-Klasse ◆ 8 Opel Astra ◆ 9 VW Touran ◆ 10 Opel Tigra TwinTop ◆ 11 VW Golf Plus ◆ 12 Mini ◆ 13 Mercedes C-Klasse ◆ 14 Ford Mondeo ◆ 15 VW Golf Variant ◆ 16 Ford C-Max ◆ 17 VW Passat Variant ◆ 18 Toyota Yaris ◆ 19 Smart Fortwo ◆ 20 Audi Q7

Wie viel schluckt der Kofferraum? Beim Beladen des Reisegepäcks erleben Autofahrer oft Überraschungen

Ein Test mit TÜV und Siegel

Der große Kofferraum-Vergleich

DAS PASST WIRKLICH REIN!

Bei kaum einer anderen Angabe tricksen Autobauer mehr als bei der Kofferraumgröße. Wie die Hersteller uns verladen, entlarvt der große AUTO BILD-Test mit dem TÜV Süd

Was ist wahre Größe? Besonders beim Kofferraumvolumen überbieten sich die Autohersteller gern mit Rekordwerten. 300 Liter für einen Kleinwagen, 500 für ein Kompaktmodell, und fast 800 Liter sollen neben fünf Personen noch in einen SUV passen. Wahnsinn, viele Autos sind offenbar nicht nur Personenkraftwagen, sondern außerdem kleine Möbellaster. Zumindest auf dem Papier.

Doch stimmen die Herstellerwerte? Um das herauszufinden, hat AUTO BILD zusammen mit dem TÜV Süd in München 20 wichtige Modelle aus mehreren Segmenten einem großen Kofferraumtest unterzogen. Ergebnis: Viele Marken tricksen mit falschen Inhaltsangaben und übertreiben zum Teil maßlos.

Um das oftmals kaufentscheidende Ladevolumen zu beziffern, verwendet die Autoindustrie die Literangabe. Ermittelt wird diese mithilfe von Quadern, deren Abmessungen der Verband der Automobilindustrie (VDA) auf 200 x 100 x 50 Millimeter festgelegt hat.

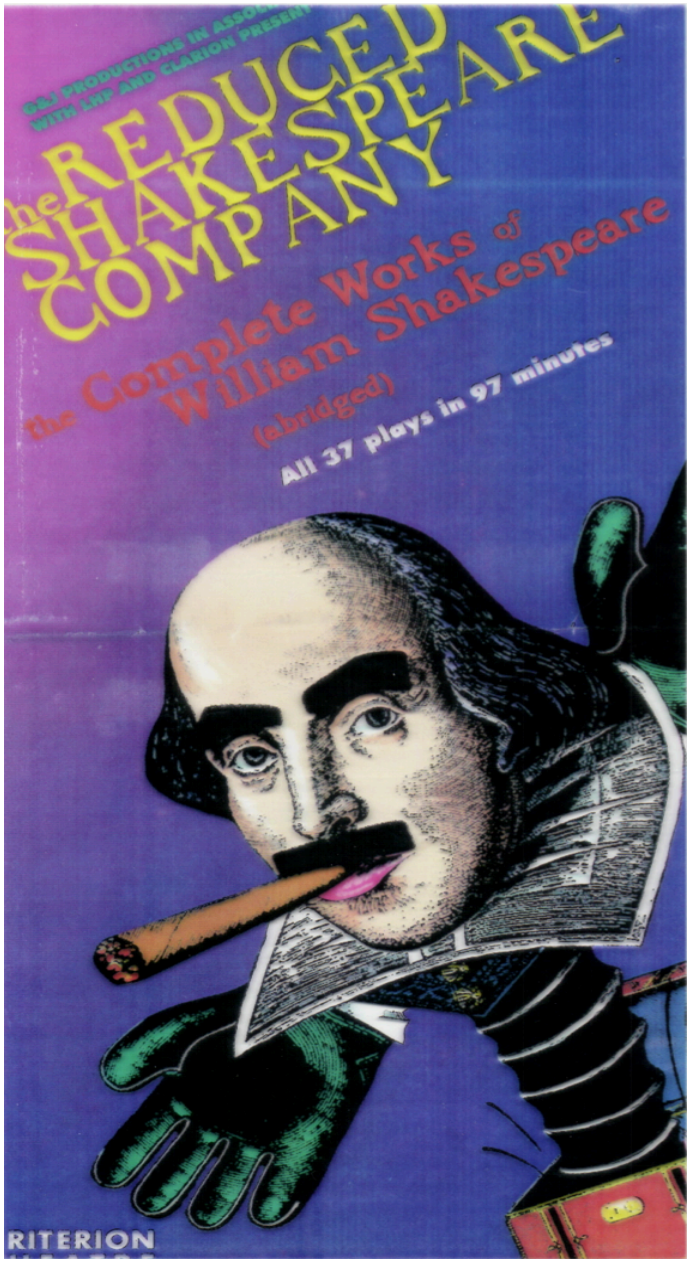
Wie mit denen ein Kofferraum zu beladen ist, wird in den DIN-Vorschriften 70020-1 und ISO 3832 detailliert beschrieben. Trotzdem haben die Hersteller offenbar ihre eigenen Gewohnheiten beim Auslitern der Kofferräume. Denn das TÜV-Resultat ist erstaunlich: Keiner – wirklich keiner – der 20 Testkandidaten trifft seine Prospektangabe.

Dabei bietet kurioserweise der Ford C-Max sogar mehr Kofferraum, als vom Werk angegeben. Bei den 19 anderen Modellen liegt das tatsächliche Volumen zwischen minus fünf und minus 234 Liter. Versteckte Hohlräume haben wir wie die Industrie zum Laderaum addiert, obwohl sie im Alltag kaum nutzbar sind. Wer versteckt schon seine Milchtüten in der Reserveradmulde und die Cornflakes in Seitenfächern neben der Warnweste?

Da das reine Litermaß aber ein theoretischer Wert ist, haben wir die besonders bei Familien beliebten Vans, Kombis und SUV außerdem einer Praxisprüfung unterzogen. Wie gut passen Koffer und Kinderwagen in die einzelnen Modelle? Auch bei diesem Familientest gab es überraschende Erkenntnisse.

Zum Beispiel diese: Probieren geht über Studieren. Wer genau wissen will, wie sich sein Gepäck in einzelne Modelle einladen lässt, sollte das beim Händler mit seinem Ladegut prüfen. Nur das verrät die wahre Größe. JM

Wieviel passt in eine Vorlesung?



Wieviel passt in einen Kofferraum?



TEST KOFFERRAUM-VERGLEICH

VW Touran

Audi Q7

VAN GEGEN SUV

Touran fasst mehr als Q7

134 Liter zu wenig

Werksangabe: 695 Liter

Gemessen: 561 Liter

VW Touran

234 Liter zu wenig

Werksangabe: 775 Liter

Gemessen: 541 Liter

Audi Q7

Wenn das keine Überraschung ist: Audis Riesen-SUV ist nur außen groß. Der sehr viel kürzere und kompaktere VW Touran packt mehr ein. Mit 561 Liter gemessenem Volumen übertrifft er sogar den Q7. Allerdings liegt auch der Touran erheblich unter seiner Werksangabe von 695 Litern. Wird seine Rückbank vorgeschoben, schluckt er sogar 716 Liter – wieder mehr als der Q7 (650 Liter mit vorgerückten Sitzen). Ein echter Raumriese, der Touran. Ganz anders der Audi Q7: Bei der Innenraumausnutzung enttäuscht der XXL-SUV. Das Werk nennt ein Volumen von 775 Litern hinter den Rücksitzen. Klingt gewaltig. Tatsächlich sind es aber nur 541 Liter. Macht minus 234 Liter. Das entspricht fast dem Stauvolumen des Peugeot 207, mit dem hier übertrieben wird. Durch seine verschiebbare Rückbank eröffnet der Q7 mehrere Beladungsmöglichkeiten. Wenn das Heckrollo entfernt ist, nähert sich der Q7 seiner Prospektangabe und er erreicht immerhin 732 Liter. Bei dachhoher Beladung sind es bis zu 1070 Liter.

So sehen Testsieger aus: quadratisch, praktisch, gut. Als Lademeister erfüllt der Touran vorzügliche Dienste. Ob großes Reisegepäck oder Sportgeräte, er schluckt jede Menge Ladegut

Außen riesig, innen vergleichsweise mickrig – der Audi-SUV verspricht viel mehr, als er halten kann. Das normale Kofferraumvolumen liegt gerade mal auf dem Niveau eines Ford Mondeo

CABRIO GEGEN SCHRÄGHECK

TwinTop verlädt Corsa

Die Preisliste des Tigra TwinTop prahlt mit 440 Liter Volumen bei geschlossenem Dach. Stark übertrieben: Tatsächlich passen nur 372 Liter rein. Opel hat sich nach eigener Aussage auf Computerdaten verlassen und das AUTO BILD-Ergebnis bestätigt. Bei echter Beladung von Hand schafften auch die Opel-Experten nur 381 Liter, wobei davon sieben Liter auf die Reserveradmulde und 50 Liter auf die Ablage hinter den Sitzen entfallen. Immerhin schlägt der Tigra damit Markenbruder Corsa deutlich. Satte 134 Liter bleibt das Schrägheckmodell hinter dem Cabrio zurück und verfehlt seine Werksangabe um 47 Liter. Wird die Hutablage entfernt und der Corsa bis zur Oberkante der Rücksitzlehne beladen, passen noch 18 Liter mehr rein und das Volumen steigt auf 256 Liter.

Opel Tigra TwinTop

Opel Corsa

Werksangabe: 440 Liter

Gemessen: 372 Liter

Opel Tigra Twintop

68 Liter zu wenig

Erstaunlich, was in das kleine Cabrio passt. Bei geöffnetem Dach schrumpft der Kofferraum natürlich extrem

Die starken Einzüge am Corsa-Heck schränken die Kofferraum-Nutzbarkeit ein. Seine Werksangabe verfehlt er klar

Opel Corsa

Werksangabe: 285 Liter

Gemessen: 238 Liter

47 Liter zu wenig

C-Klasse schluckt mehr als 3er-Touring

Dass der Lifestylelaster von BMW kein Raumwunder ist, war zu erwarten. Doch dass er nur 370 Liter einladen kann, statt der versprochenen 460, ist eine Riesen-Enttäuschung. Zumal davon auch noch 19 Liter auf die Staufächer im Heck fallen. Ohne die sind es sogar nur 351 Liter. Das kann eine klassische Limousine besser. Beispiel: Mercedes C-Klasse. Zwar versprechen auch die Stuttgarter zu viel, aber mit 464 Litern liegt der Mercedes deutlich über dem BMW. 79 davon entfallen allerdings auf die Reserveradmulde.

464 Liter – 11 Liter weniger

Werksangabe: 475 Liter

Mercedes C-Klasse

370 Liter – 90 Liter weniger

Werksangabe: 460 Liter

BMW 3er-Touring

LIMO GEGEN KOMBI II

Mondeo größer als A6

Auch beim Vergleich Mondeo gegen A6 Avant hat das Stufenheck mehr Platz. Mit satten 523 Liter Stauvolumen gehört der große Ford zu den Platzkönigen im Vergleich. Er kann sich sogar ein Notrad erlauben, das ihm einige Liter kostet. Denn zur Werksangabe fehlen 27 Liter. Der Audi Kombi lädt nur 470 Liter ein – 75 Liter weniger als versprochen. Es wenn er ohne Jalousie (517 Liter) oder dachhoch (698 Liter) beladen wird, ist er konkurrenzfähig

523 Liter – 27 Liter weniger

Werksangabe: 550 Liter

Ford Mondeo

470 Liter – 75 Liter weniger

Werksangabe: 545 Liter

Audi A6 Avant

Golf Variant

VW Passat Variant

ZWEIMAL VARIANT

Golf fast so groß wie Passat!

5 Liter zu wenig

Werksangabe: 505 Liter

Gemessen: 500 Liter

VW Golf Variant

95 Liter zu wenig

Werksangabe: 603 Liter

Gemessen: 508 Liter

VW Passat Variant

Das üppige Gepäckabteil des Golf ist gut gerüstet für Transportaufgaben aller Art. Die TÜV-Messung bestätigt den Werkswert bis auf fünf Liter

Der Passat-Laderaum präsentiert sich edel, glattflächig und deshalb gut nutzbar. Doch die VW-Werksangabe ist stark übertrieben

Das VW-interne Duell hat viel Brisanz. Greift doch der 5625 Euro günstigere Golf Kombi (als 105-PS-Diesel) seinen größeren Variant-Bruder ungeniert an. Aber was heißt hier größerer Bruder? VW gibt zwar ein Ladevolumen von 603 Litern für den Passat an und wahrt damit einen Sicherheitsabstand von fast 100 Litern zum Golf, doch die TÜV-Messung enthüllt: Tatsächlich packen beide Variant nahezu gleich viel ein. Der Golf erreicht bis auf fünf Liter seine Werksangabe, der Passat liegt 95 Liter darunter. Der Kannibalisierungseffekt wird noch deutlicher bei Beladung ohne Gepäckraumrollo. Dann ist der Golf sogar um vier Liter besser. 83 Liter Volumen, die in der TÜV-Messung enthalten sind, entfallen beim Passat allein auf die Reserveradmulde.

DIE KOFFERRAUM-KÖNIGE

1 VW Touran 561 Liter

Sieger ist der Touran. Keiner steckt mehr weg. Bei dachhoher Beladung sogar 928 Liter

2 Audi Q7 541 Liter

Obwohl der mächtige Audi-SUV seine Werksangabe extrem verfehlt, gehört er zu den Größten im Testfeld

3 Ford Mondeo 523 Liter

Das klassische Stufenheck-Konzept bietet sehr

Klötzchen für Klötzchen: So hat der TÜV getestet

Maßarbeit: Beladen bis zur Fensterkante. Anschließend muss die Klappe problemlos schließen

20 Autos, drei TÜV-Experten und 3000 VDA-Quader – der Kofferraum-Vergleich dauerte eine ganze Woche. Allein das Beladen des Audi Q7 brauchte rund sechs Stunden. Akribisch stapelten die Spezialisten die Styroporklötzchen in jedes Auto. Basierend auf DIN 70020-1 und ISO 3832, wurde nach TÜV-Spezifikation getestet. Dazu befanden sich die Sitze der Rücksitzbank – wo möglich – in hinterster Position, die Lehne war für eine entspannte Reiseposition justiert, und die Höhe des gemessenen Kofferraumvolumens war begrenzt durch Hutablage oder die Gepäckraumabdeckung.

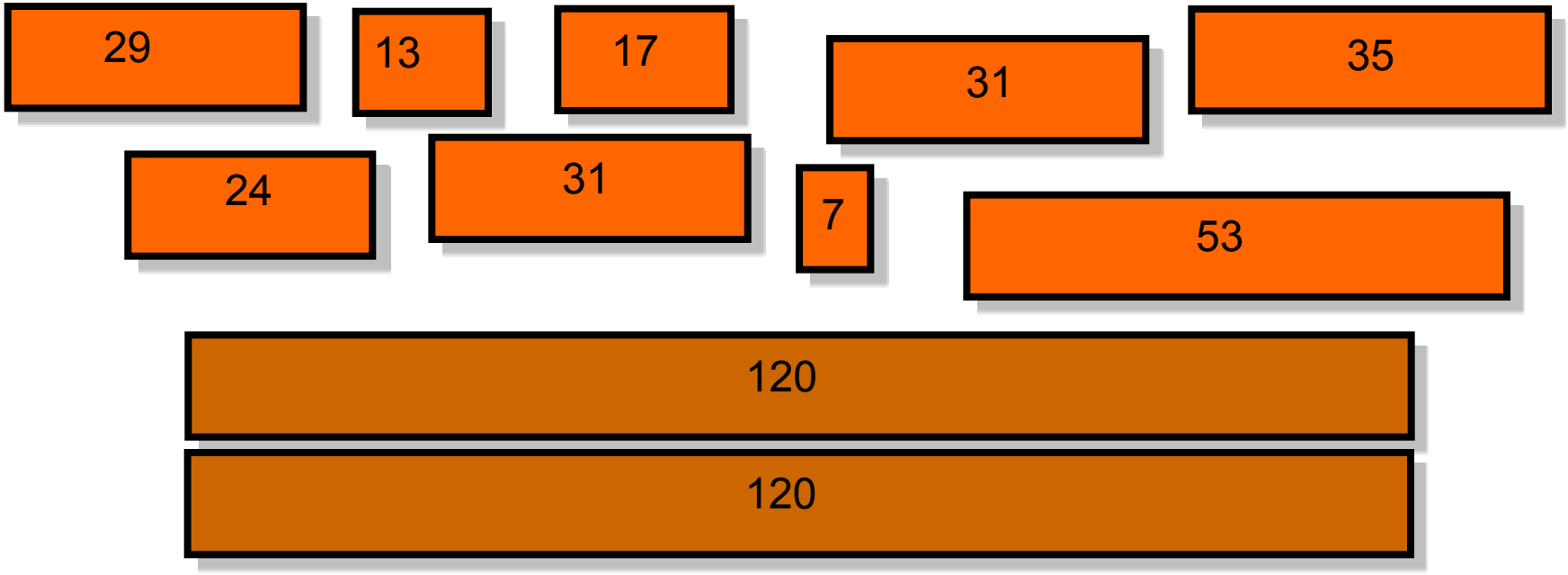
DIN 70020-1

Konzentration: Die N Quader (200 mal 100 m Millimeter) müssen g gestapelt und ausgezählt we

Kofferpacken für die Reise

Gegeben: Eine Menge von *n* Objekten, jedes mit einer Größe l_i

Gesamtgröße ist $\sum_{i=1}^{n} l_i = 2K$

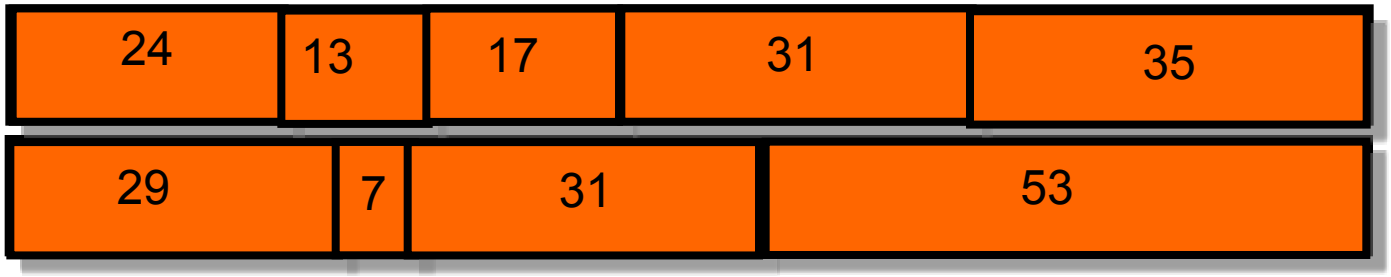


Gesucht: Eine Packung in zwei Container der Größe *K*

Kofferpacken für die Reise

Gegeben: Eine Menge von *n* Objekten, jedes mit einer Größe l_i

Gesamtgröße ist $\sum_{i=1}^{n} l_i = 2K$



Gesucht: Eine Packung in zwei Container der Größe *K*

Karp (1972): Das Finden einer optimalen Partition ist NP-vollständig.

Packen und Presse(n)

BRAUNSCHWEIGER ZEITUNG
WOLFENBÜTTELER ZEITUNG UND ANZEIGER
Samstag, 28. Januar 2006 · unabhängig · nicht parteigebunden · Nr. 24 · 61. Jahrgang · 1,20 €

Wenn Mathematiker Autos beladen

TU-Professor Sándor Fekete tüftelt an ganz handfesten Alltagsproblemen, kombiniert und optimiert

Von Cornelia Steiner

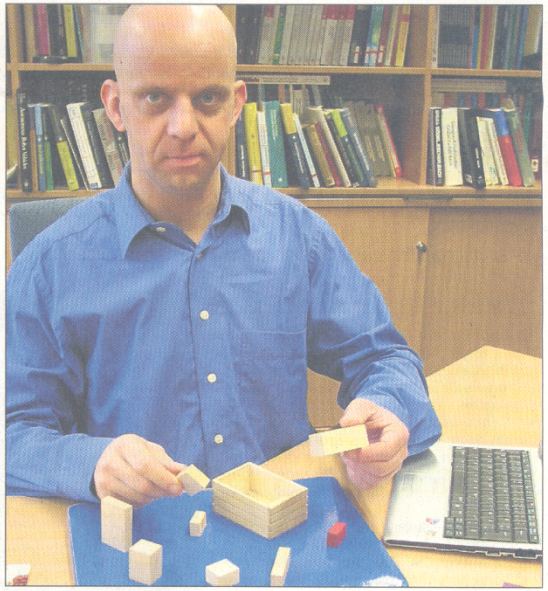
Sieben große Probleme müssen Mathematiker weltweit lösen, jeweils eine Million Dollar Preisgeld sind dafür ausgeschrieben. Bei manchen von ihnen versteht man selbst die Fragestellung erst nach einigen Fachsemestern. Das gesteht sogar Sándor Fekete, Professor für mathematische Optimierung an der TU Braunschweig. Er hat auch nicht den Anspruch, eines dieser abstrakten Probleme zu lösen. Stattdessen widmet er sich mit Kollegen und Studenten den handfesten Fragen des alltäglichen Lebens. Denn Mathematik hat eben doch etwas mit dem Hier und Jetzt zu tun: mit Routenplanung zum Beispiel, mit dem Packen eines Kofferraumes oder sogar mit Rasenmähen. All das sind Probleme, bei denen es darum geht, aus einer bestimmten Menge möglicher Kombinationen die beste Lösung zu finden.

> „Spannend wird das Lösen von Optimierungsproblemen dadurch, dass man oft nicht alle Informationen zur Verfügung hat."
>
> Sándor Fekete

In jedem Fall gilt: „Man braucht immer einen Algorithmus, der unabhängig vom Einzelfall eine systematische Lösung anbietet", sagt Fekete. Für die Routenplanung bedeutet das: Ein einziger Algorithmus liefert sowohl den kürzesten Weg von Braunschweig nach Peine als auch den kürzesten Weg von Helmstedt nach Wolfenbüttel. Dafür muss das Problem zunächst mathematisch modelliert werden. In unserem Fall wären die Knoten Kreuzungen und die Verbindungen Wege. Bevor gerechnet wird, muss der Umfang des Graphen allerdings einschränkt werden: Für die Fahrt nach Peine ist schließlich das Umfeld von Helmstedt uninteressant. „Wenn so eine Struktur vorhanden ist, kann man sehr gut ermitteln, wie man am schnellsten zum Wunschort kommt", sagt er.

Doch alles hat auch seine Tücken, denn es gibt einfache und schwere Probleme: Einfach ist es, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten zu berechnen. Einfach ist es auch, die schnellste Verbindung in einem Fahrplan zu finden, oder die billigste Flugverbindung zu ermitteln.

Schwierig wird das Ganze aber, sobald mehrere Wegeprobleme ineinander greifen: Das ist der Fall, wenn der kürzeste Weg über mehrere Punkte in unbestimmter Reihenfolge berechnet wird. Wer also eine schnelle Rundreise durch alle Braunschweiger Kneipen plant, sollte wissen, wie das funktioniert. Kompliziert ist es auch, einen guten Bahnfahrplan zu erstellen, oder Flugpläne. Denn dann müssen zusätzliche Aspekte beachtet werden – Art der Flugzeuge, Größe der Besatzung, Strecken, Anzahl der



Professor Sándor Fekete zeigt auf einfache Weise die Probleme, die sich beim Packen und Beladen eines Kofferraumes ergeben können. Fotos (2): Steiner

nicht alle wichtigen Informationen zur Verfügung hat", sagt er. So ist zum Beispiel ungewiss, ob ein Stau auftritt oder wie viele Passagiere tat-

sich mit modernen Computersystemen und großen Kommunikationsnetzen beschäftigen, aber auch mit selbststeuernden Robotern und de-

Kofferraumdesign



Wie groß ist der Kofferraum?

DIN-Messmethode: Zahl der 5cm*10cm*20cm-Quader (Tetra Paks), die sich packen lassen

Kofferraumdesign



Klötzchen für Klötzchen: So hat der TÜV geteste

Maßarbeit: Beladen bis zur Fensterkante. Anschließend muss die Klappe problemlos schlie

■ 20 Autos, drei TÜV-Experten und 3000 VDA-Quader – der Kofferraum-Vergleich dauerte eine ganze Woche. Allein das Beladen des Audi Q7 brauchte rund sechs Stunden. Akribisch stapelten die Spezialisten die Styroporklötzchen in jedes Auto. Basierend auf DIN 70020-1 und ISO 3832, wurde nach TÜV-Spezifikation getestet. Dazu befanden sich die Sitze der Rücksitzbank – wo möglich – in hinterster Position, die Lehne war für eine entspannte Reiseposition justiert, und die Höhe des gemessenen Kofferraumvolumens war begrenzt durch Hutablage oder die Gepäckraumabdeckung.

DIN 70020-1

Konzentration: Die K
Quader (200 mal 100 m
Millimeter) müssen g
gestapelt und ausgezählt we

DIN-Mess 20cm-
Quader ssen

Kofferraumdesign



Wie groß ist der Kofferraum?

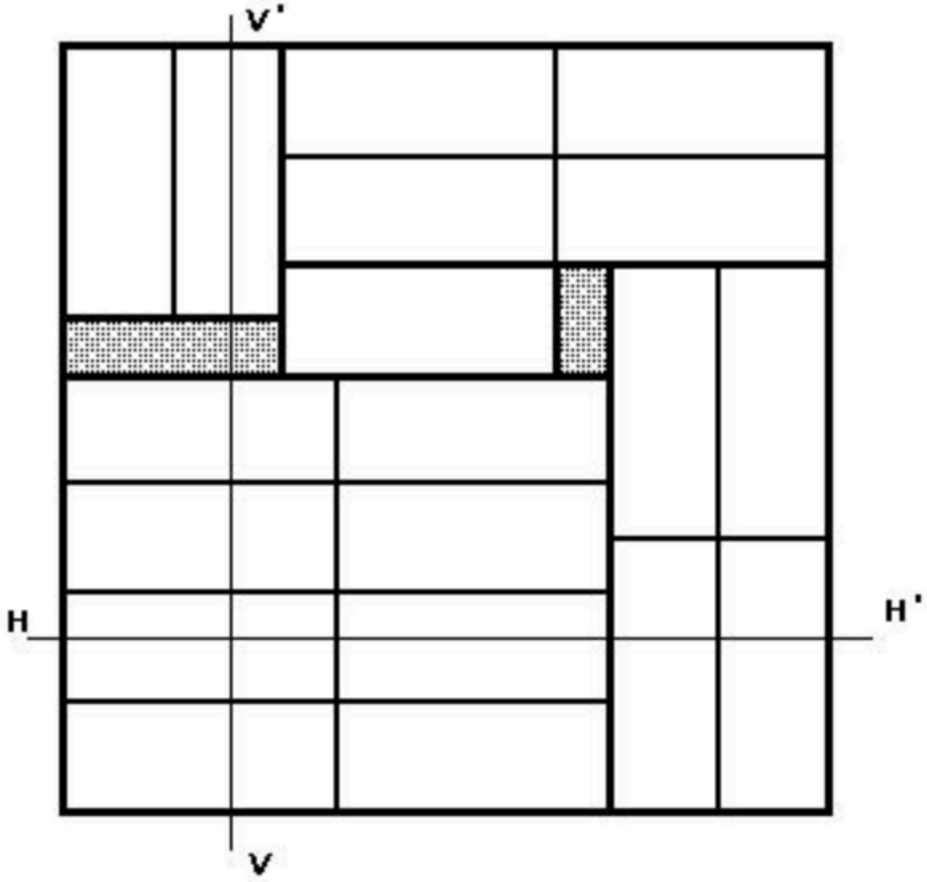
DIN-Messmethode: Zahl der 5cm*10cm*20cm-Quader (Tetra Paks), die sich packen lassen

Schwierigkeit: Mehrdimensionales Packen ist praktisch noch schwerer als eindimensionales!





Kofferraumdesign



Kofferraumdesign

Next Up Previous
Next: Numerical List of All

The Open Problems Project

edited by **Erik D. Demaine**

Joseph S. B. Mitchell

Joseph O'Rourke

Introduction

This is the beginning of a project[1] to record open problems of interest to researchers in computational geometry and related fields. It commenced with the publication of thirty problems in Computational Geometry Column 42 [MO01] (see Problems 1-30), but has grown much beyond that. We encourage correspondence to improve the entries; please send email to topp@csail.mit.edu. If you would like to submit a new problem, please fill out this template.

Each problem is assigned a unique number for citation purposes. Problem numbers also indicate the order in which the problems were entered. Each problem is classified as belonging to one or more categories.

The problems are also available as a single Postscript or PDF file.

To begin navigating through the open problems, you may select from a category of interest below, or view a list of all problems sorted numerically.

Kofferraumdesign

Problem 55: Pallet Loading

Statement

What is the complexity of the pallet loading problem? Given two pairs of numbers, (A, B) and (a, b), and a number n, decide whether n small rectangles of size $a \times b$, in either axis-parallel orientation, can be packed into a large rectangle of size $A \times B$.

This problem is not even known to be in NP, because of the compact input description, and the possibly complicated structure of a packing, if there is one.

Origin

Uncertain, pending investigation.

Status/Conjectures

Open.

Motivation

Natural packing problem; first-rate example of the relevance of coding input and output.

Partial and Related Results

Tarnowsky [Tar92] showed that the problem can be solved in time polynomial in the size of the input if we are restricted to ``guillotine'' patterns, i.e., arrangements of items that can be obtained by a recursive sequence of edge-to-edge cuts. This result uses some nontrivial algebraic methods.

Related Open Problems

What is the complexity of packing a maximal number of unit squares in a simple polygon? (Problem 54)

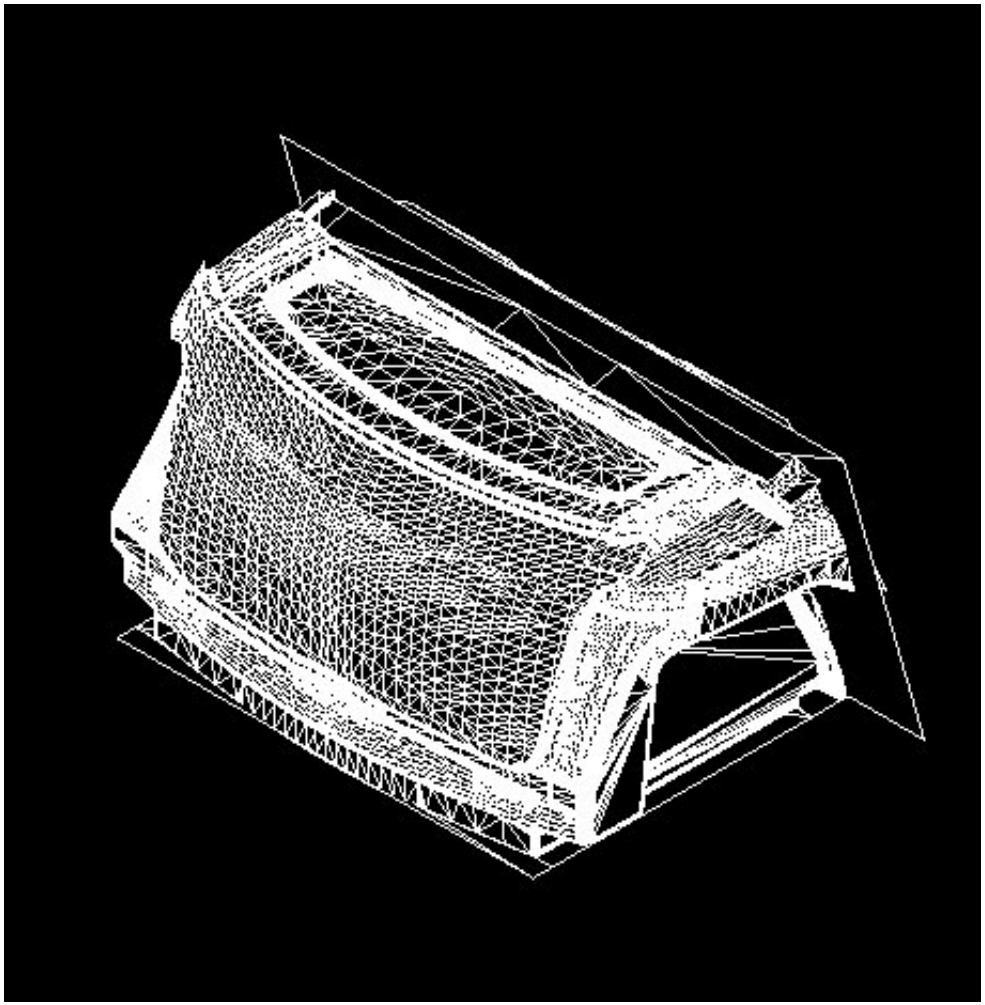
Appearances

[Dow87] claims the problem to be NP-hard; [Exe88] claims the problem to be in NP; but both claims are erroneous. The precise nature of the difficulty is stated in

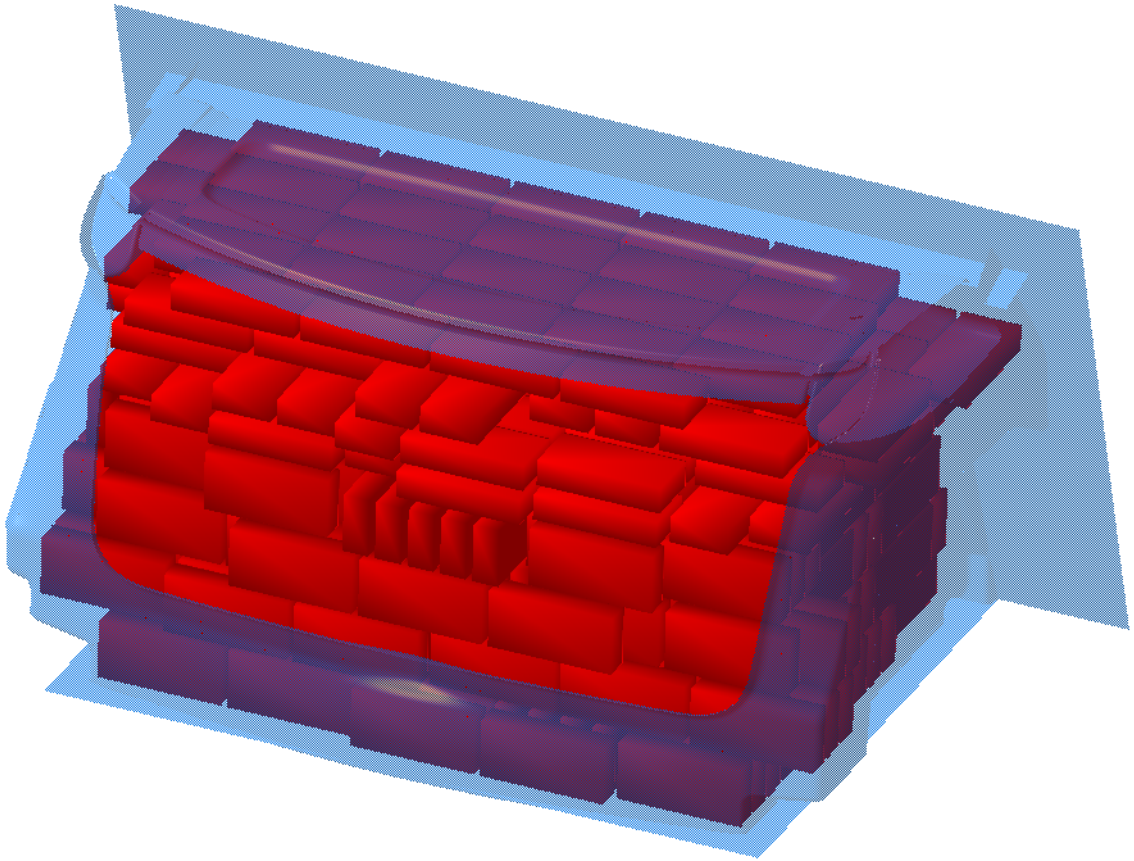
Ergebnisse



Ergebnisse



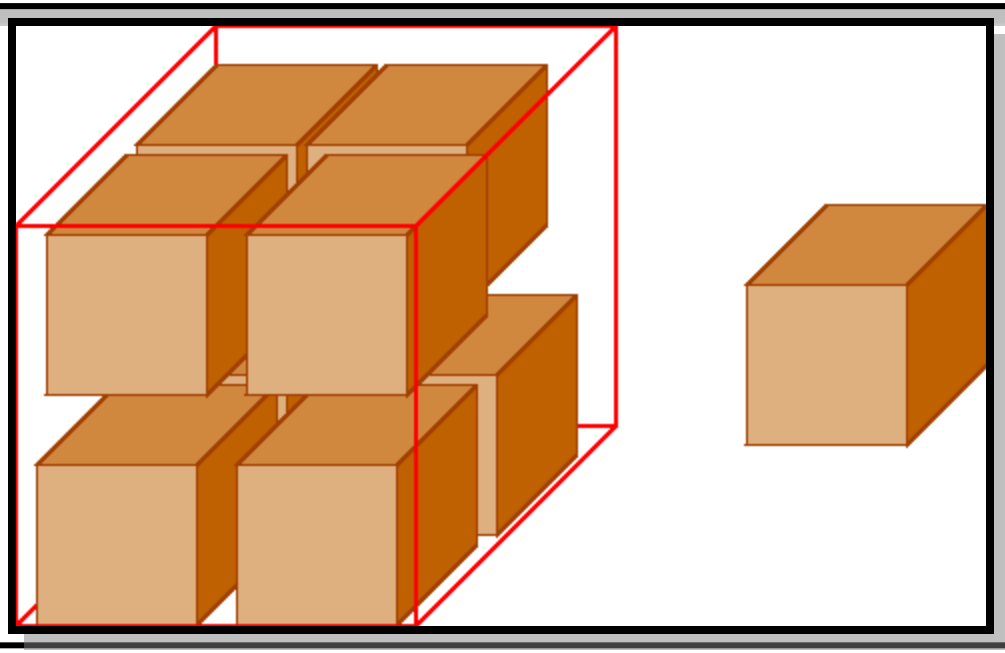
Ergebnisse



Mathematische Methoden

Ein einfaches Beispiel

Gegeben: 9 Würfel der Kantenlänge 0.4

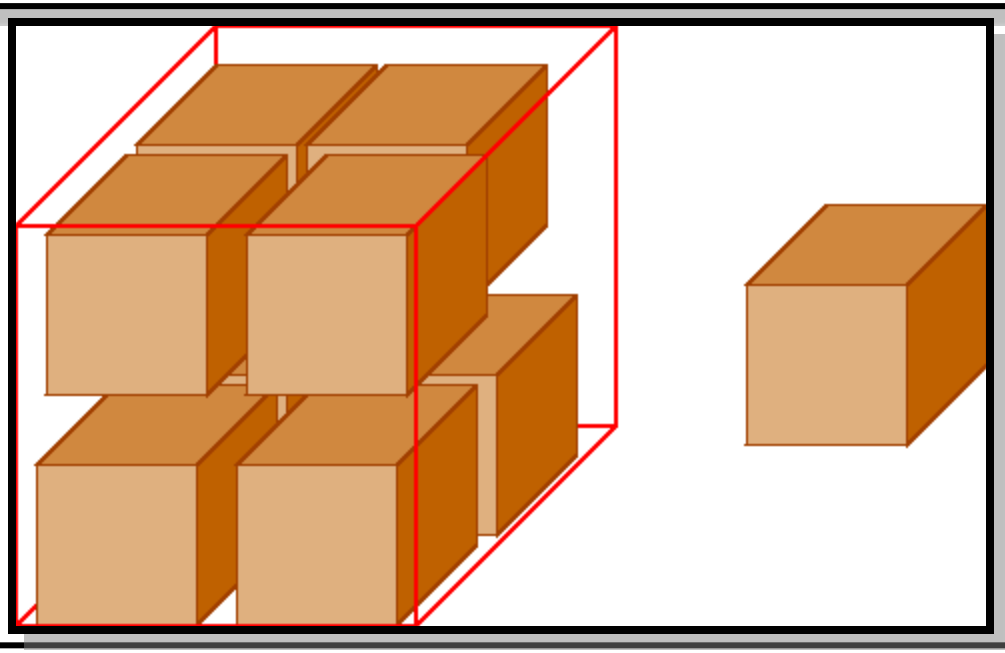


Frage: Passen die Würfel in einen würfelförmigen Container der Kantenlänge 1?

$$Volumen: 9 * 0.4^3 = 0.576$$

Ein einfaches Beispiel

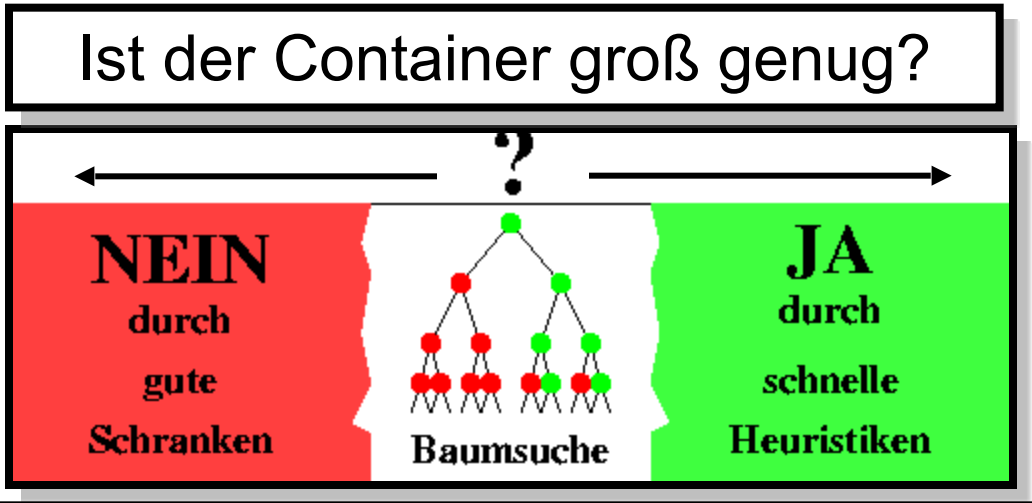
Gegeben: 9 Würfel der Kantenlänge 0.4



Frage: Passen die Würfel in einen würfelförmigen Container der Kantenlänge 1?

„Geht‘s nicht noch etwas schneller?“

Lösen schwerer Packungsprobleme



New classes of fast lower bounds for bin packing problems
SP **Fekete**... - Mathematical programming, 2001 - Springer
... xi∈T xi + ∑ xi∈**S**\T ⌊(k + 1)xi⌋ < (k + 1) ∑ xi∈**S** xi. Page 6. 16 Sándor P. **Fekete**, Jörg Schepers By definition of u (k) , the terms (k + 1) ∑ x∈T u (k)(x) and k ∑ x∈**S**\T u (k)(x) are in- teger, so by virtue of ∑ xi∈**S** xi ≤ 1, we have the inequality (k + 1) ∑ x∈T u (k)(x) + ...
Zitiert durch: 95 - Ähnliche Artikel - Alle 11 Versionen

A general framework for bounds for higher-dimensional orthogonal packing problems
SP **Fekete**... - Mathematical Methods of Operations Research, 2004 - Springer
... Sa"ndor P. Fekete1, JoØrg Schepersy,2 1 Department of Mathematical Optimization, Braunschweig University of Technology, D–38106 Braunschweig, Germany (email: **s.fekete**@tu-bs.de) 2 IBM Germany Gustav-Heinemann-Ufer, 120/122 D–50968, KoØln, Germany (...
Cited by 48 - Related articles - BL Direct - All 5 versions - Import into BibTeX

A combinatorial characterization of higher-dimensional orthogonal packing
SP **Fekete**... - Mathematics of Operations Research, 2004 - JSTOR
... Saindor P. **Fekete** J0"rg Schepers Department of Mathematical Optimization, Braunschweig University of Technology, D-38106 Braunschweig, Germany, **s.fekete**@tu-bs.de IBM Germany, Gustav-Heinemann-Ufer 120/122, D-50968 Kiln, Germany, schepers@de.ibm.com ...
Cited by 58 - Related articles - BL Direct - All 11 versions - Import into BibTeX

An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing
SP Fekete, J Schepers... - Arxiv preprint cs/0604045, 2006 - arxiv.org
Page 1. arXiv:cs/0604045v1 [cs.DS] 11 Apr 2006 An Exact Algorithm for Higher-Dimensional Orthogonal Packing ⋆ Sándor P. Fekete Department of Mathematical Optimization Braunschweig University of Technology D–38106 Braunschweig GERMANY s.fekete@tu-bs.de ...
Zitiert durch: 68 - Ähnliche Artikel

Schnelle Heuristiken:

Bekannt

Gute Schranken:

Fekete&Schepers 2001
(Bin Packing, also 1D)
Fekete&Schepers 2004
(Höhere Dimensionen)

Schnelle Baumsuche:

Fekete&Schepers 2004.

Praktische Umsetzung:

Fekete, Schepers, van der Veen 2006

Gute und schnelle Schranken

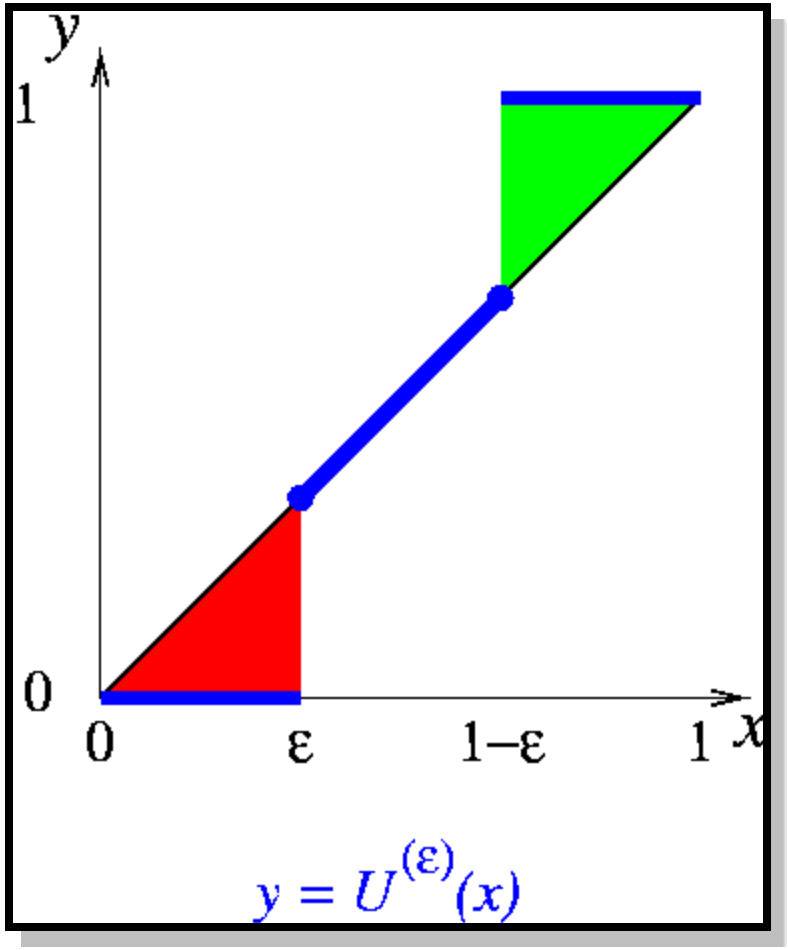
Idee: Betrachte *dualzulässige Funktionen*:

$$(1)\ f : [0,1] \to [0,1]$$

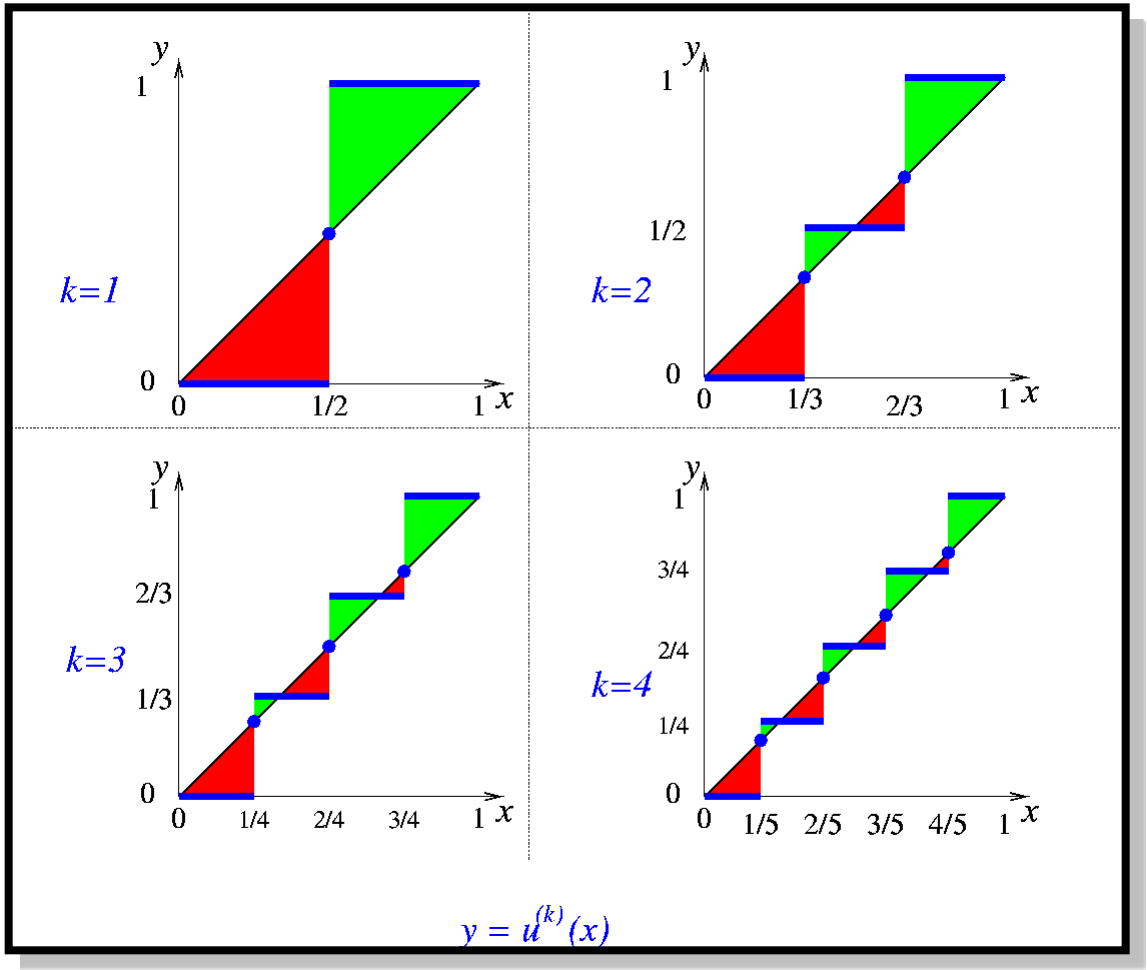
$$(2)\ \sum_{i \in S} w_i \leq 1 \Rightarrow \sum_{i \in S} f(w_i) \leq 1$$

Satz (Fekete & Schepers):
Ist f eine dualzulässige Funktion, dann ist $\sum_{i \in S} f(w_i)$ eine untere Schranke für das benötigte Volumen.

Gute und schnelle Schranken

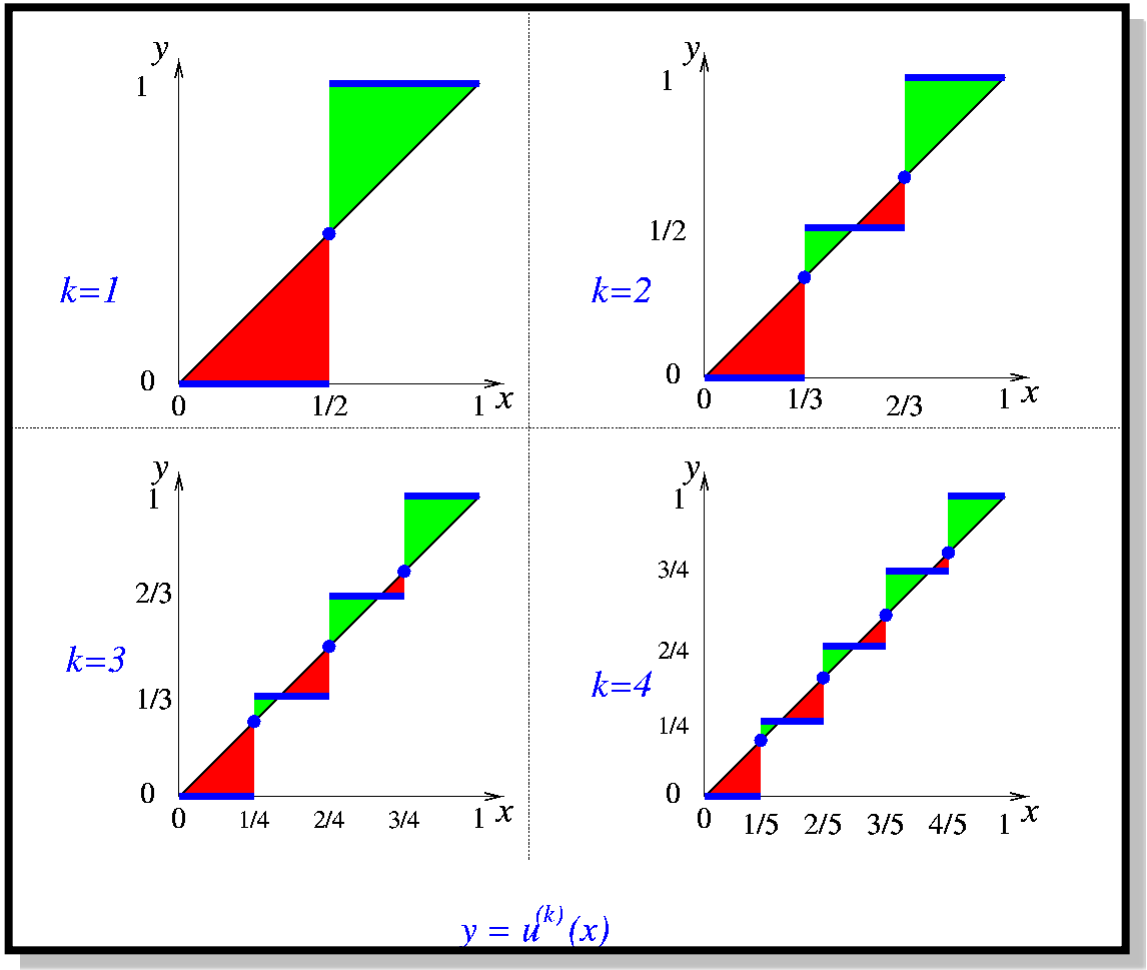


Gute und schnelle Schranken



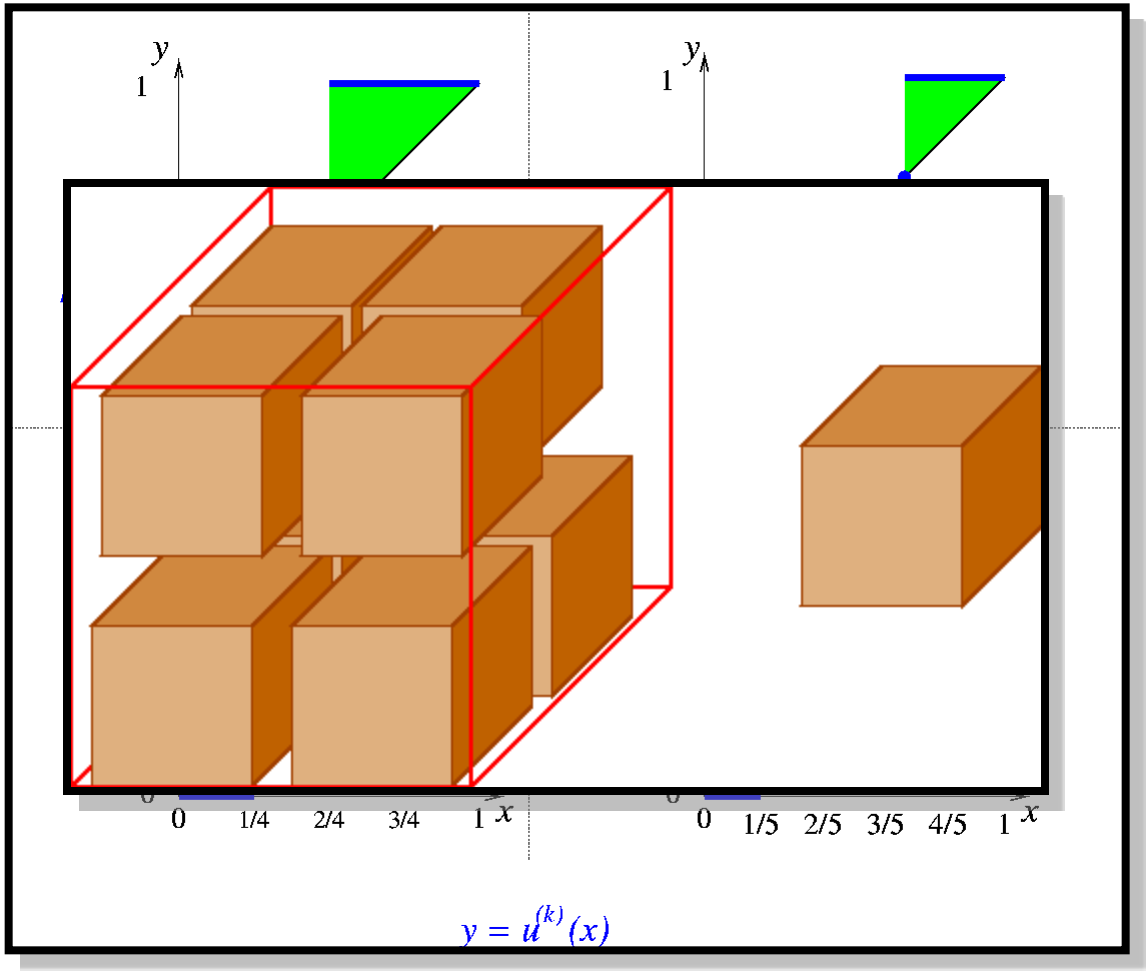
Konsequenz I: Die resultierenden Schranken sind in Linearzeit berechenbar und haben eine Gütegarantie von ¾.

Gute und schnelle Schranken



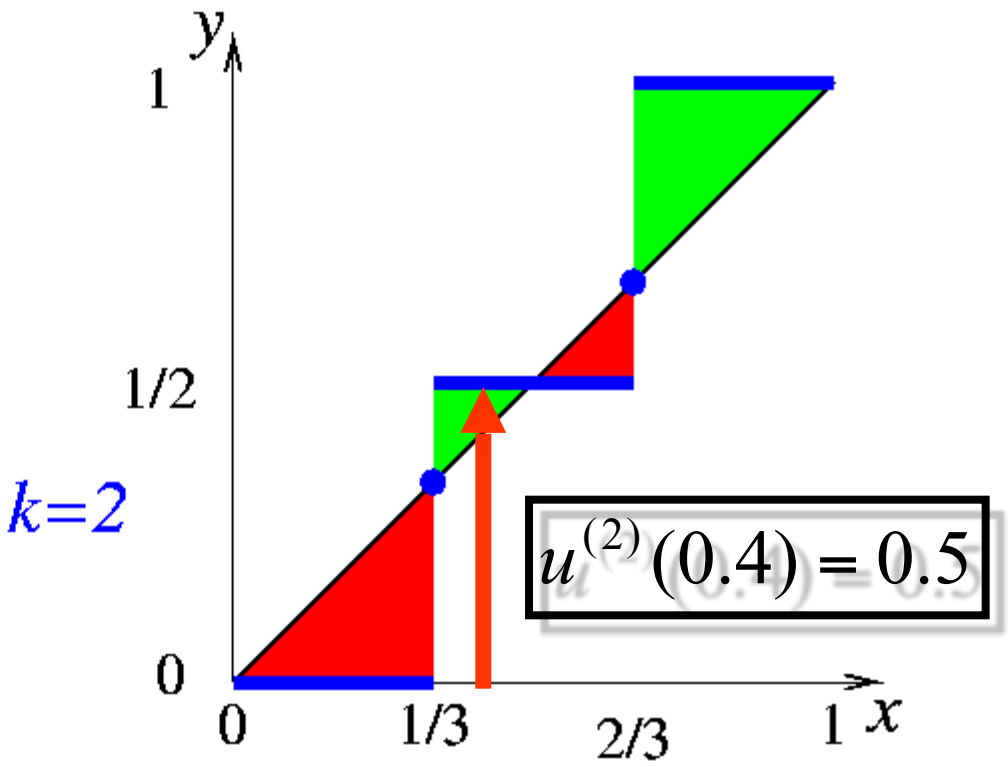
Konsequenz II: Framework für mehrdimensionale Schranken

Gute und schnelle Schranken



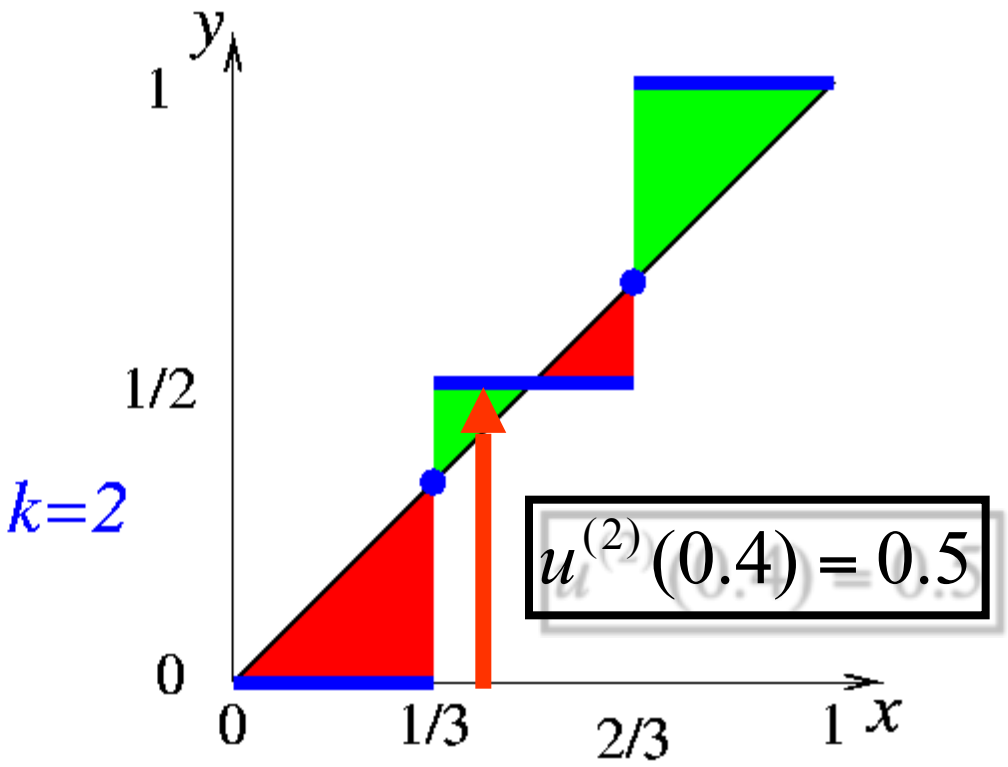
Konsequenz II: Framework für mehrdimensionale Schranken

Gute und schnelle Schranken



Konsequenz II: Framework für mehrdimensionale Schranken

Gute und schnelle Schranken



$$Volumen: 9 * (u^{(2)}(0.4))^3 = 9 * (0.5)^3 = 1.125$$

Konsequenz II: Framework für mehrdimensionale Schranken

Ergebnisse

Table 7. Performance for instances without large or small items

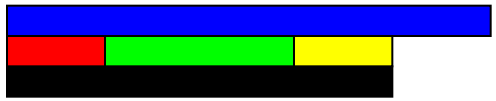
$n = 100$	Bound	L_1	L_2	$L_*^{(2)}$	$L_*^{(3)}$	$L_*^{(4)}$	$L_*^{(5)}$	$L_*^{(10)}$	$L_*^{(20)}$	$L_*^{(100)}$
Set										
{20, ..., 80}	rel. error	4.713	0.603	0.405	0.322	0.259	0.255	0.220	0.210	0.208
	zero gap	76	693	794	837	868	870	888	893	894
	max gap	13	2	1	1	1	1	1	1	1
	total gap	2598	311	206	163	132	130	112	107	106
{20, ..., 70}	rel. error	1.509	1.063	1.049	1.036	0.590	0.575	0.564	0.538	0.525
	zero gap	440	528	535	541	731	738	743	755	761
	max gap	7	2	2	2	2	2	2	2	2
	total gap	722	495	488	482	273	266	261	249	243
{20, ..., 60}	rel. error	1.340	1.340	1.340	1.324	1.324	1.324	1.324	1.324	1.324
	zero gap	483	483	483	484	484	484	484	484	484
	max gap	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	total gap	556	556	556	549	549	549	549	549	549
{20, ..., 50}	rel. error	4.321	4.321	4.321	4.321	4.318	4.318	4.318	4.318	4.214
	zero gap	56	56	56	56	57	57	57	57	60
	max gap	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	total gap	1615	1615	1615	1615	1614	1614	1614	1614	1575
{20, ..., 40}	rel. error	2.236	2.236	2.236	2.236	2.236	2.236	2.236	2.236	2.236
	zero gap	363	363	363	363	363	363	363	363	363
	max gap	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	total gap	702	702	702	702	702	702	702	702	702
{20, ..., 35}	rel. error	6.020	6.020	6.020	6.020	6.020	6.020	6.020	6.020	6.016
	zero gap	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	max gap	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	total gap	1796	1796	1796	1796	1796	1796	1796	1796	1795
{20, ..., 30}	rel. error	2.597	2.597	2.597	2.597	2.597	2.597	2.597	2.597	2.594
	zero gap	603	603	603	603	603	603	603	603	603
	max gap	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	total gap	727	727	727	727	727	727	727	727	726

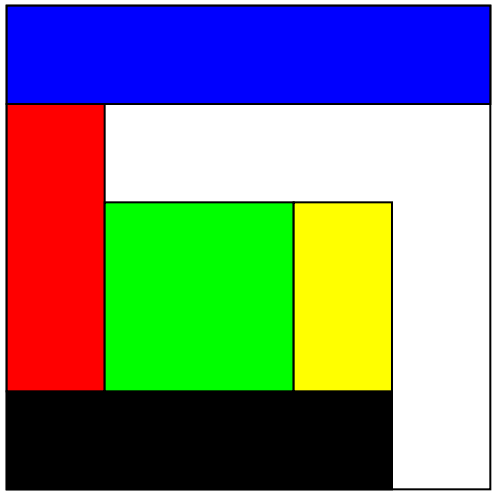
Ergebnisse

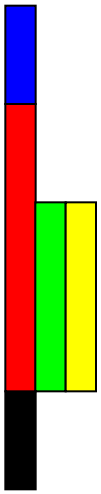
Table 3. Zero gap (out of 1000 instances) for lower bounds for the BPP

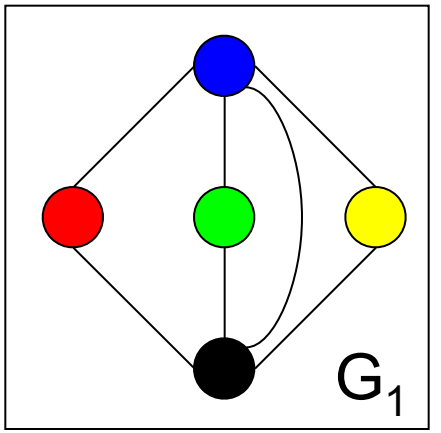
	Bound	L_1	L_2	$L_*^{(2)}$	$L_*^{(3)}$	$L_*^{(4)}$	$L_*^{(5)}$	$L_*^{(10)}$	$L_*^{(20)}$	$L_*^{(100)}$
Set	n									
{1, . . . , 100}	32	286	908	918	928	940	942	953	956	959
	100	122	775	833	854	864	872	888	895	897
	316	29	574	706	747	764	774	811	826	828
	1000	2	382	579	613	632	638	667	678	681
{1, . . . , 90}	32	347	924	937	945	949	952	963	965	968
	100	231	770	843	869	881	881	896	901	904
	316	275	679	796	826	939	841	855	864	865
	1000	410	703	854	872	878	878	888	888	888
{1, . . . , 80}	32	596	938	952	959	963	963	967	967	969
	100	672	922	950	955	957	957	957	957	957
	316	862	951	971	971	971	971	971	971	971
	1000	982	989	989	989	989	989	989	989	989
{20, . . . , 80}	32	187	836	866	882	902	906	921	928	931
	100	76	693	794	837	868	870	888	893	894
	316	21	474	676	720	755	760	795	808	814
	1000	1	354	607	646	666	666	687	698	699
{20, . . . , 70}	32	541	764	777	793	867	877	887	893	902
	100	440	528	535	541	731	738	743	755	761
	316	9	13	13	13	104	105	105	105	105
	1000	0	0	0	0	6	6	6	6	6

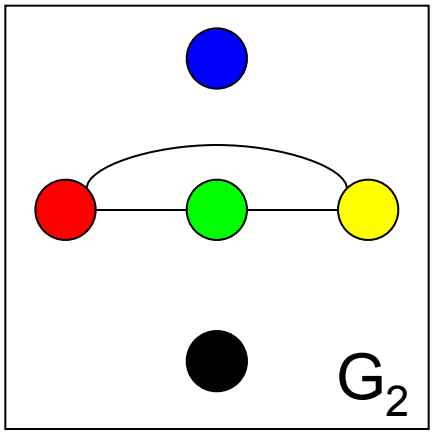
Baumsuche: Packmusterklassen









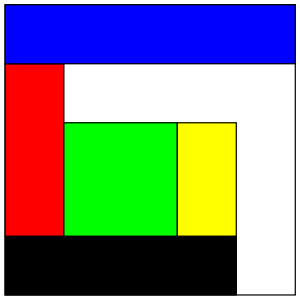


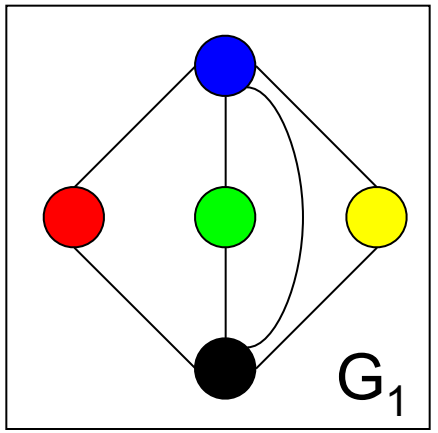
Baumsuche: Packmusterklassen

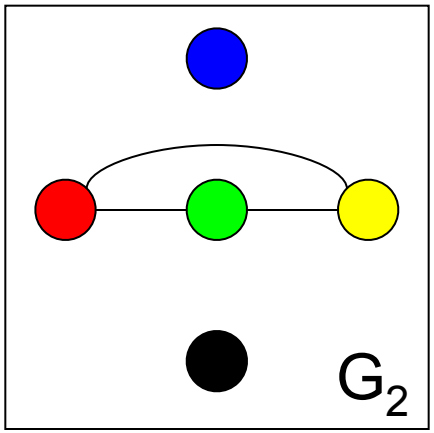
1. G_1 und G_2 sind Intervallgraphen

2. Unabhängige Mengen von Knoten in G_1 und G_2 sind i-zulässig

3. G_1 und G_2 haben keine Kanten gemeinsam





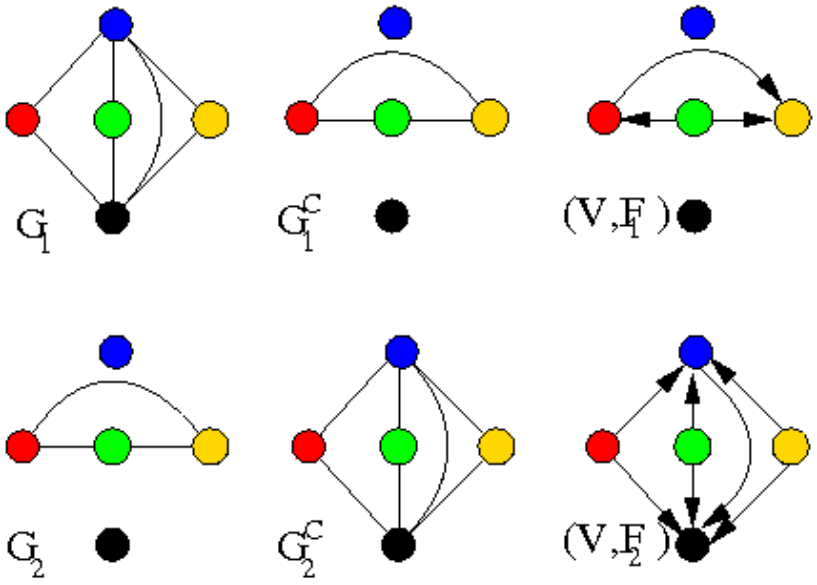


Satz (Fekete & Schepers): Eine Menge von Boxen lässt genau dann eine Packung zu, wenn es eine Packmusterklasse gibt.

Packmusterklassen (3)

Beweisskizze:

Wegen P1 sind die Komplementärgraphen transitiv orientierbar:



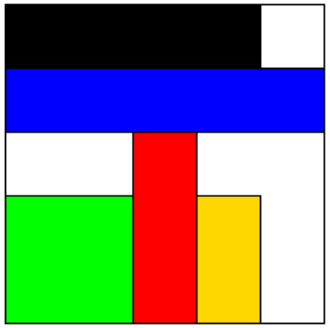
Diese Orientierung repräsentiert die Partialordnung der Objekte in der entsprechenden Koordinatenrichtung.

Packmusterklassen (4)

(Forts. Beweis)



Induktiv in aufsteigender Koordinatenordnung läßt sich dann eine Packung aufbauen:

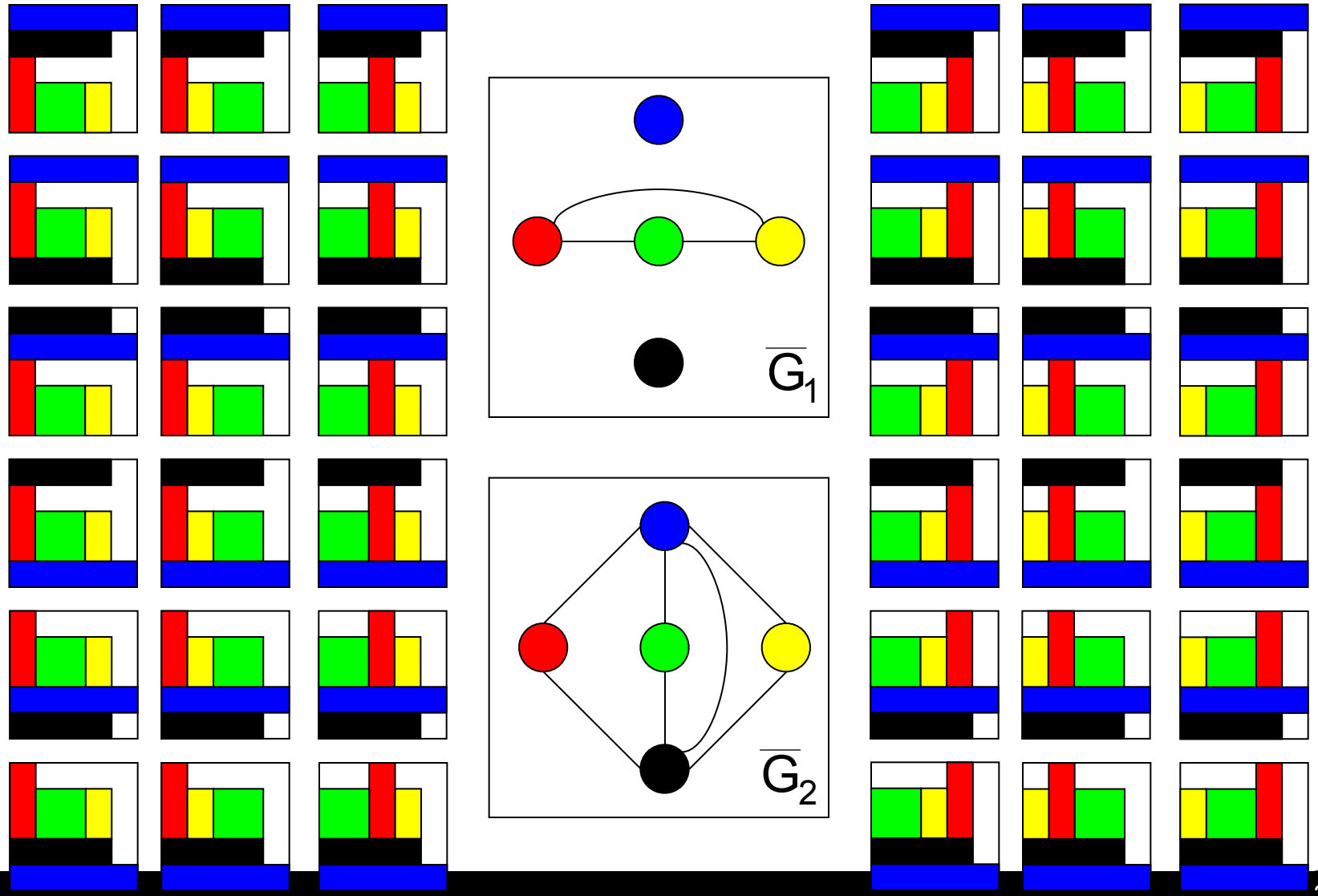


Wegen P3 gibt es keine Überlappungen.

Wegen P2 ragen keine Objekte aus dem Container.
(Man beweist in der Induktion, daß es zu jedem Zeitpunkt der Konstruktion für jede Koordinate eine unabhängige Menge gibt, die die gesamte Ausdehnung der Packung in der Koordinate aufspannt.)

□

Packen und Packmusterklassen



23

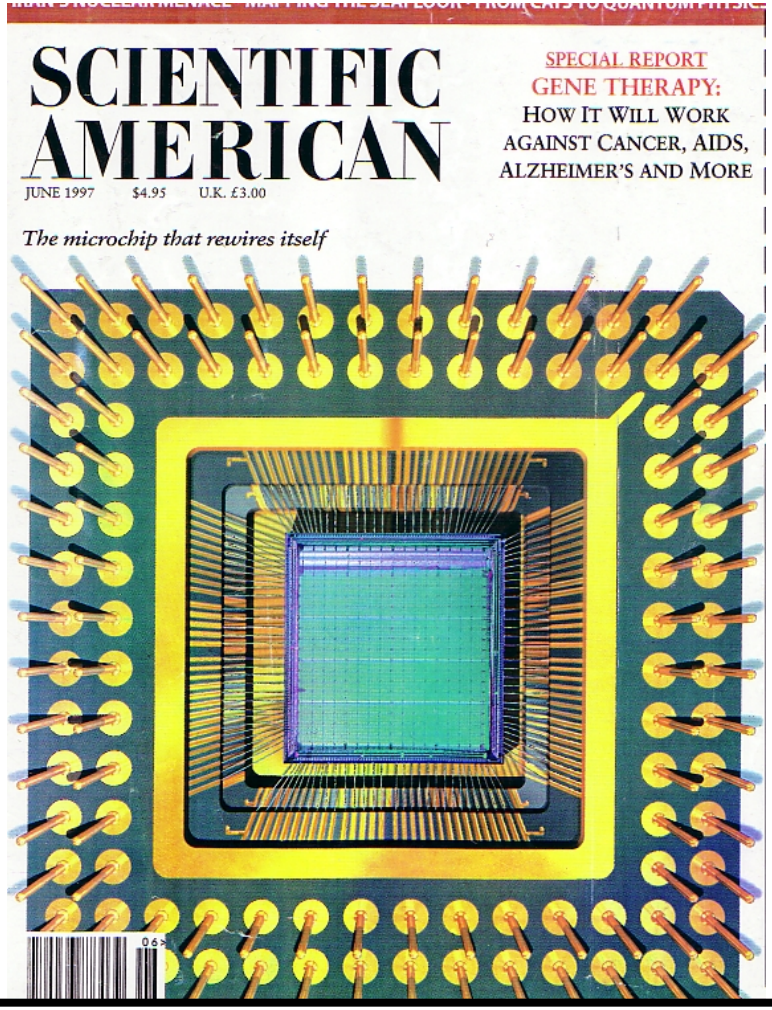
Ergebnisse

Problem	Time/s	B85	HC95	CM04			
				A_0	A_1	A_2	A_3
beasley1	<0.01	0.9					
beasley2	<0.01	4.0					
beasley3	<0.01	10.5					
beasley4	<0.01	0.1	0.04				
beasley5	<0.01	0.4					
beasley6	<0.01	55.2	45.20				
beasley7	<0.01	0.5	0.04				
beasley8	0.02	218.6					
beasley9	<0.01	18.3	5.20				
beasley10	<0.01	0.9					
beasley11	<0.01	79.1					
beasley12	0.02	229.0	>800				
hadchr3	<0.01		532				
hadchr7	0.01		>800				
hadchr8	<0.01		>800				
hadchr11	<0.01		>800				
hadchr12	<0.01		65.2				
wang20	0.67			6.75	6.31	17.84	2.72
chrwhi62	0.54						
3	0.54						
3s	0.46						
A1	1.12						
A1s	1.51						
A2	1.62						
A2s	8.35						
CHL2	10.36						
CHL2s	6.84						
CHL3	<0.01						
CHL3s	<0.01						
CHL4	<0.01						
CHL4s	<0.01						
CHL5	4.66						
cgcut1	<0.01			0.30	1.47	1.46	1.46
cgcut2	>1,800			>1,800	>1,800	533.45	531.93
cgcut3	0.54			23.76	23.68	4.59	4.58
gcut1	0.01			0.00	0.00	0.01	0.01
gcut2	0.47			0.52	0.19	25.75	0.22
gcut3	4.34			>1,800	2.16	276.37	3.24
gcut4	195.62			>1,800	346.99	>1,800	376.52
gcut5	0.02			0.00	0.50	0.03	0.50
gcut6	0.38			0.06	0.09	9.71	0.12
gcut7	2.24			1.31	0.63	354.50	1.07
gcut8	253.54			1,202.09	136.71	>1,800	168.50
gcut9	0.01			0.01	0.09	0.05	0.08
gcut10	0.67			0.01	0.13	6.49	0.14
gcut11	8.82			16.72	14.76	>1,800	16.30
gcut12	109.81			63.45	16.85	>1,800	25.39
gcut13	>1,800			>1,800	>1,800	>1,800	>1,800
okp1	10.82			24.06	25.46	72.20	35.84
okp2	20.25			>1,800	>1,800	1,535.95	1,559.00
okp3	5.98			21.36	1.91	465.57	10.63
okp4	2.87			40.40	2.13	0.85	4.05
okp5	11.78			40.14	>1,800	513.06	488.27

Packen in der Elektrotechnik

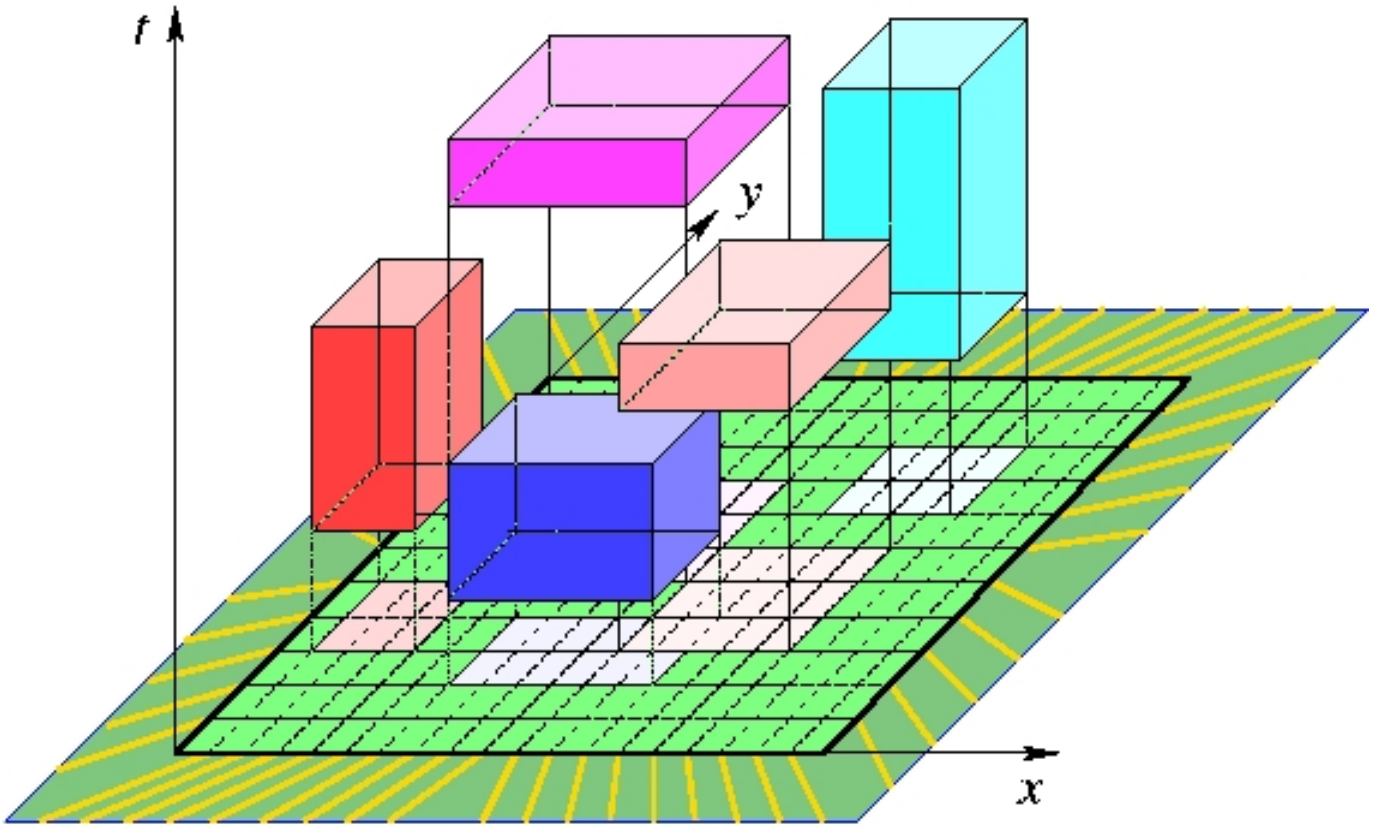
Leistungsfähige Methode für
mehrdimensionales orthogonales Packen

Packen in der Elektrotechnik



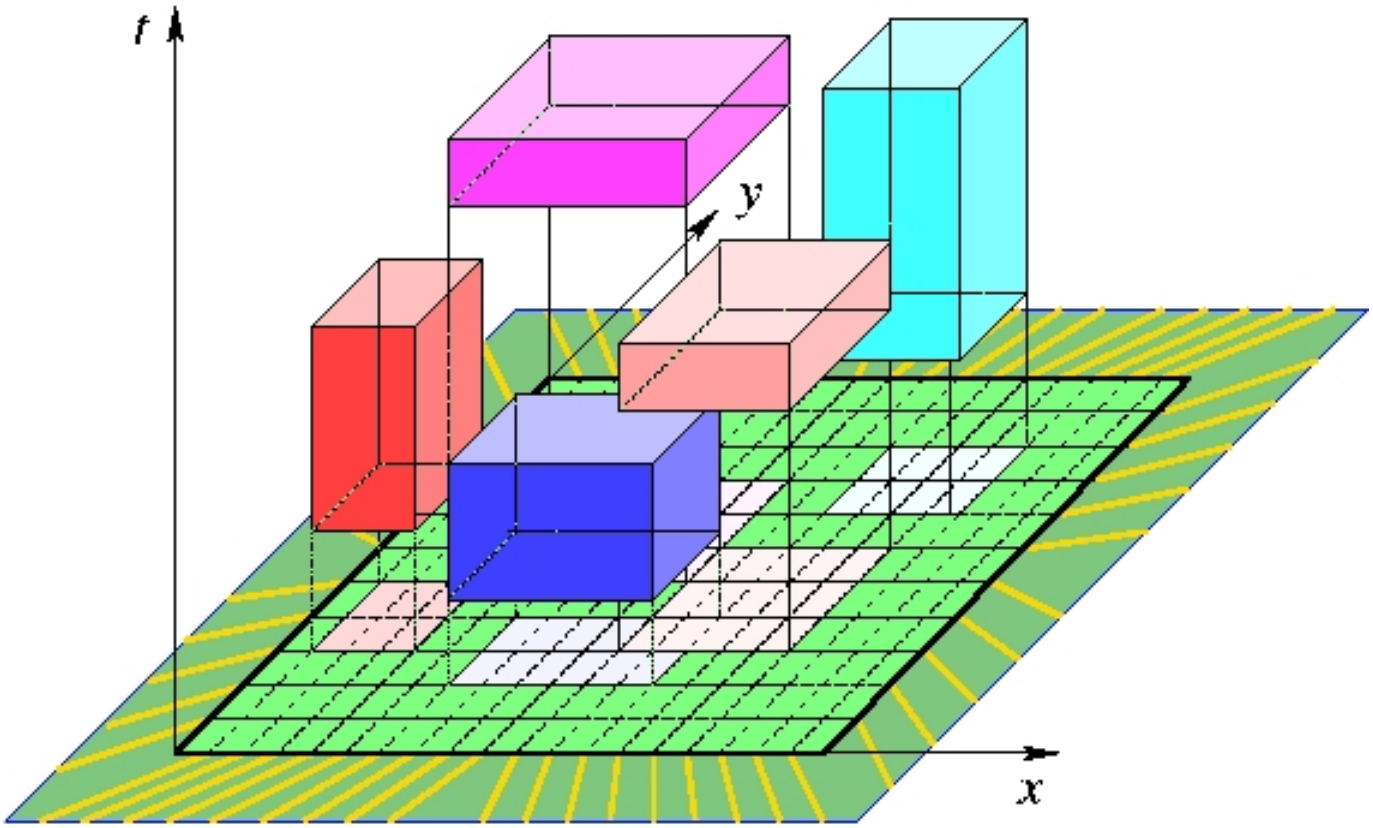
Anwendung: Reconfigurable Computing

Packen in der Elektrotechnik



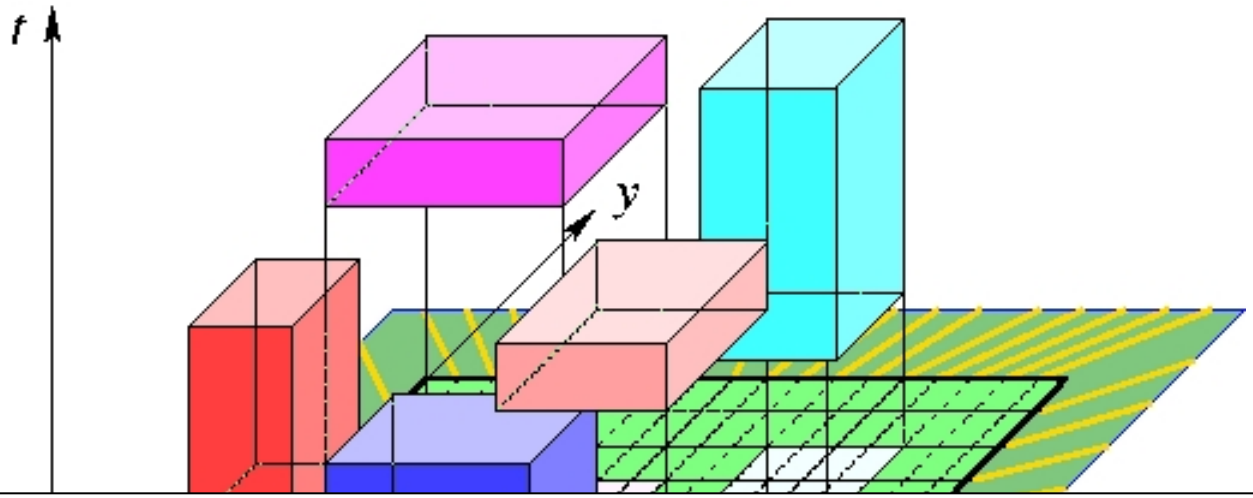
Anwendung: Reconfigurable Computing

Packen in der Elektrotechnik



DFG-Projekt ``ReCoNodes“ 2003-2009,
mit Jürgen Teich (Software-Hardware-CoDesign, Erlangen)

Packen in der Elektrotechnik

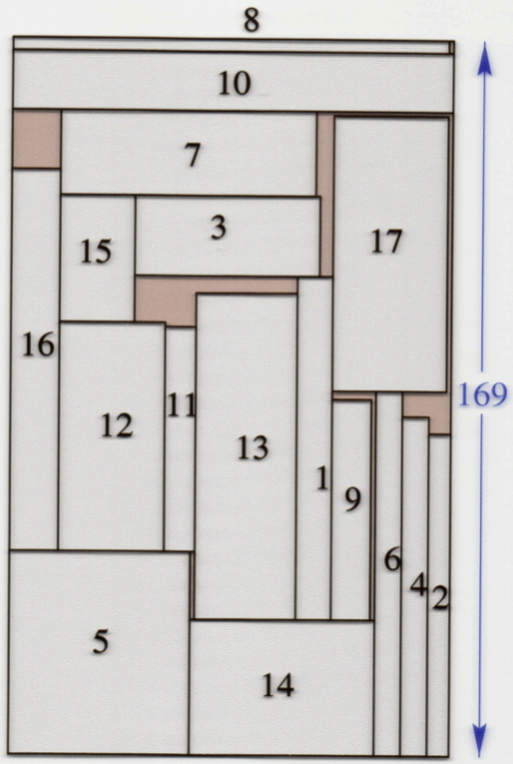


Optimal FPGA module placement with temporal precedence constraints
S Fekete, E Kohler... - Design, Automation and Test in ..., 2002 - ieeexplore.ieee.org
Optimal FPGA Module Placement with Temporal Precedence Constraints ... Siindor P. **Fekete*** Ekkehard Kohler+ Jiirgen Teich4 ... We consider the optimal placement of hardware mod- ules in space and time for FPGA architectures ,with re- conjiguration capabilities, ...
Cited by 97 - Related articles - All 25 versions - Import into BibTeX

Erweiterung: Packen mit Anordnungsrestriktionen
(Fekete, Köhler, Teich, *SIAM J. Disc. Math. 2006*)

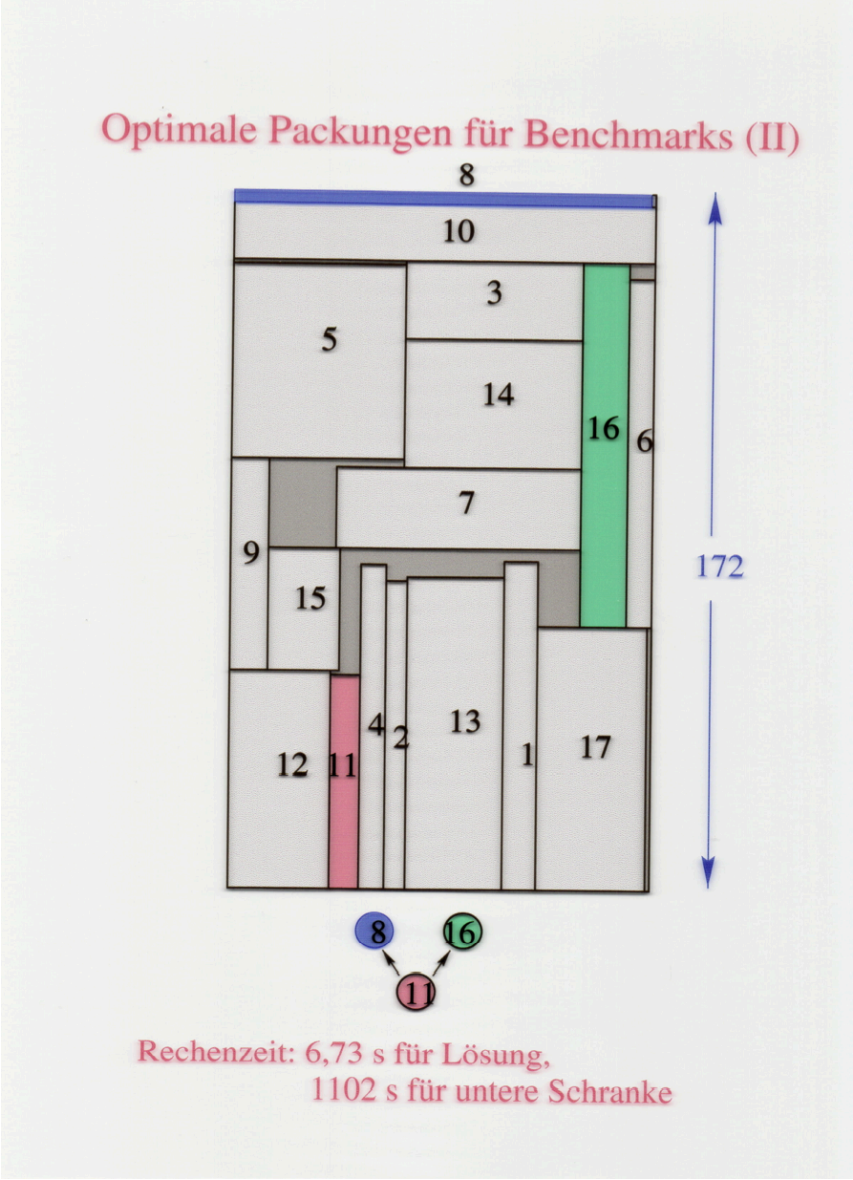
Ergebnisse

Optimale Packungen für Benchmarks

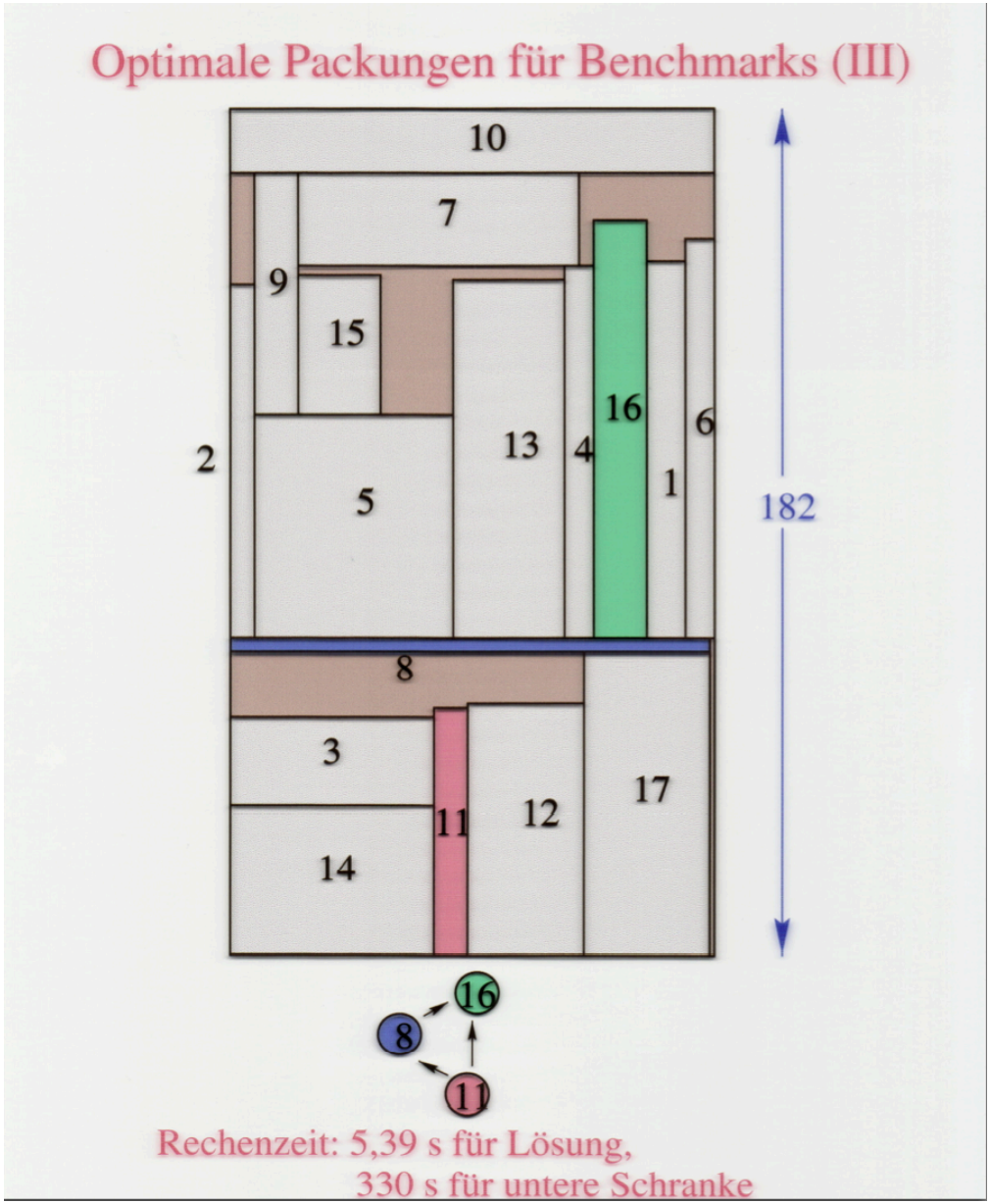


Rechenzeit: 7,29 s für Lösung,
179 s für untere Schranke

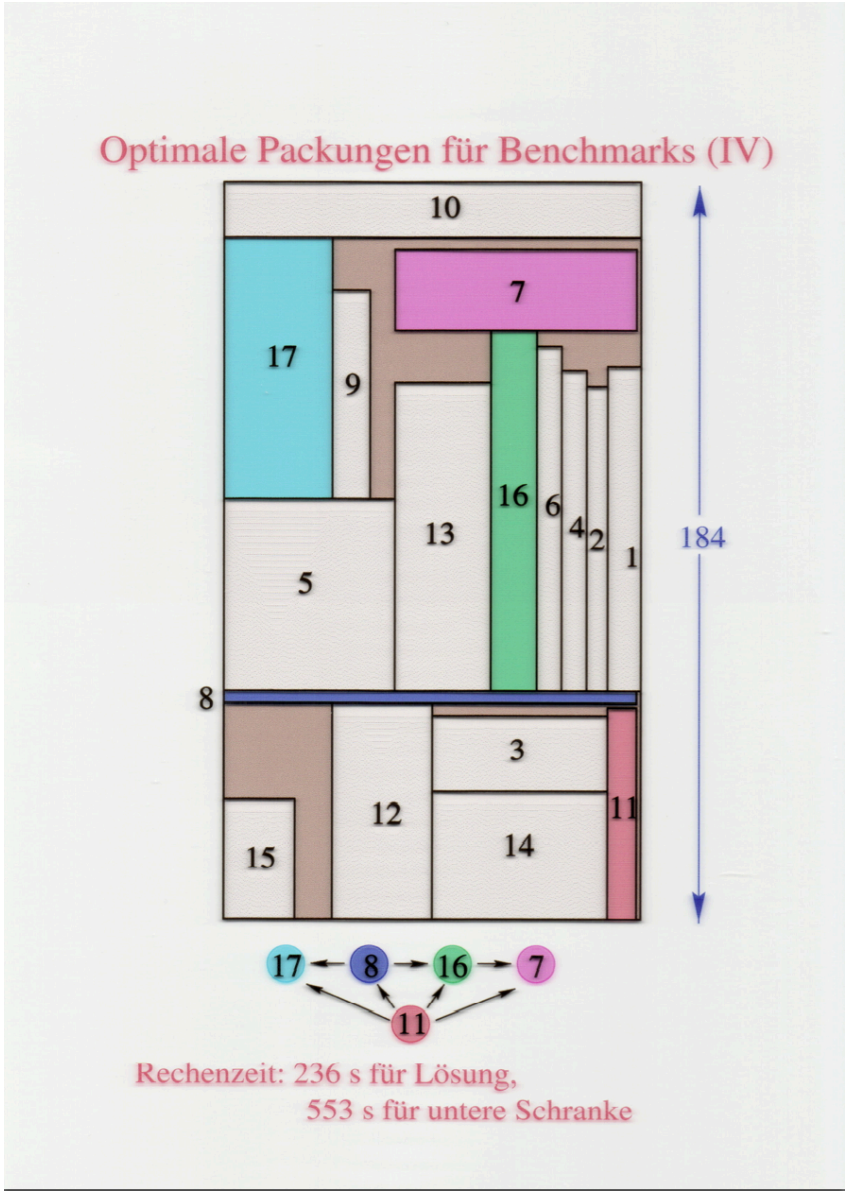
Ergebnisse


Optimale Packungen für Benchmarks (II)
8
10
5
3
14
16
6
7
9
15
172
12
11
4
2
13
1
17
8
16
11
Rechenzeit: 6,73 s für Lösung,
1102 s für untere Schranke

Ergebnisse


Optimale Packungen für Benchmarks (III)
10
7
9
15
2
5
13
4
16
1
6
182
8
3
11
12
17
14
16
8
11
Rechenzeit: 5,39 s für Lösung,
330 s für untere Schranke

Ergebnisse


Optimale Packungen für Benchmarks (IV)
10
7
17
9
16
6
4
2
1
13
5
184
8
3
12
11
14
15
17
8
16
7
11
Rechenzeit: 236 s für Lösung,
553 s für untere Schranke

Origami

Falter unter sich



Origami

ROBERT J. LANG

ORIGAMI



art

science

artist

publications

info



copyright © 2004–2010 robert j. lang origami • contact robert j. lang • site graphic design by strapp studio

Origami

ROBERT J. LANG
ORIGAMI

art

compositions
insects & arthropods
birds
mammals
plants & flowers
sea life & mollusks
human figures
reptiles & amphibians
dinosaurs & mythical
objects
geometrics & tessellations
currency
bronzes
crease patterns
commercial
exhibitions
lectures
monumental
challenge

science

artist

publications

info

Objects



Black Forest Cuckoo Clock, opus 182

Medium: One uncut 1x10 rectangle of Zanders 'elefantenhaut' paper
Composed: 1987
Folded: 1987
Size: 15"
Diagrams: *Origami Design Secrets*
Comments: This was for a time my most well-known composition and the most complex origami figures around. My first cuckoo clock was fairly plain; my second (unpublished) one was composed after a vist to the Black Forest. For the third design, I came up with this figure, composed and folded in Ludwigsburg, Germany.



Origami

ROBERT J. LANG
ORIGAMI

art

compositions
insects & arthropods
birds
mammals
plants & flowers
sea life & mollusks
human figures
reptiles & amphibians
dinosaurs & mythical
objects
geometrics & tessellations
currency

bronzes
crease patterns
commercial
exhibitions
lectures
monumental
challenge

science
artist
publications
info

Dinosaurs & Mythological



New Entry

Redpath Pteranodon, opus 506

Medium: One uncut square of St.-Armand paper
Composed: 2007
Folded: 2007
Size: 15"
Diagrams: *License to Fold*
Comments: This model was commissioned by the Redpath Museum of Natural History in Montreal, Quebec, for folding in life size (3 meter wingspan). The full size version is currently installed at the Museum.



Origami

ROBERT J. LANG
ORIGAMI

art

compositions
insects & arthropods
birds
mammals
plants & flowers
sea life & mollusks
human figures
reptiles & amphibians
dinosaurs & mythical
objects
geometrics & tessellations
currency

bronzes

crease patterns

commercial

exhibitions

lectures

monumental

challenge

science

artist

publications

info

Insects & Arthropods

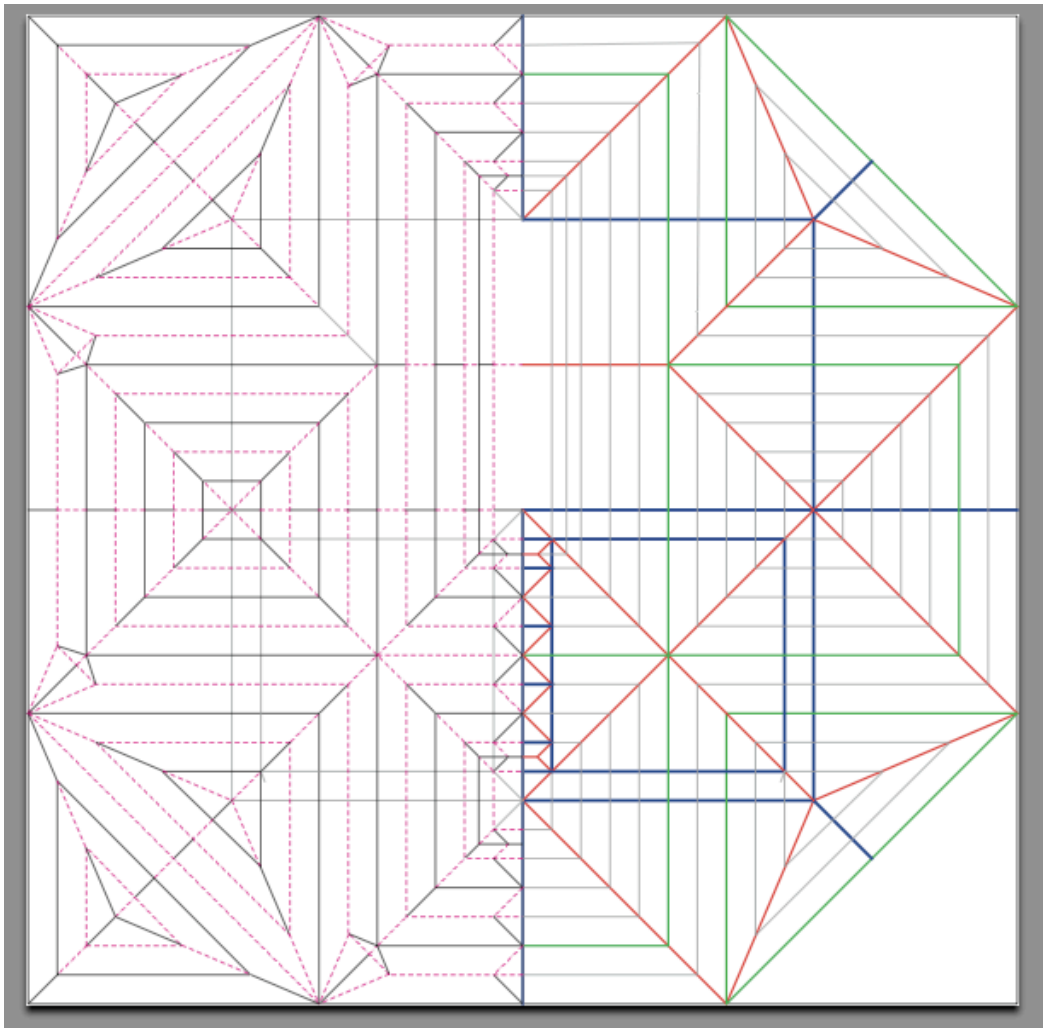


Mt Diablo Tarantula, opus 481

Medium: One uncut square of Korean hanji
Composed: 2006
Folded: 2006
Size: 3.5"
Diagrams: Not available
Crease Pattern: here



Origami



Origami

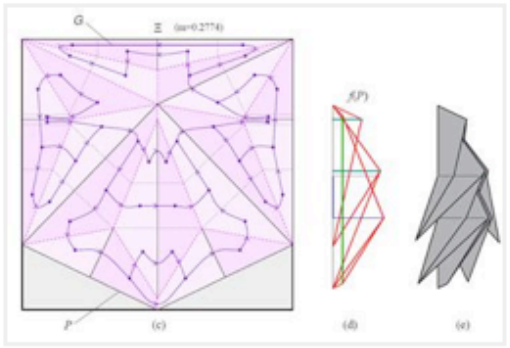
username ••••••••• LOGIN Register Forgot Pass ACCOUNT | EVENTS | RESOURCES | SUBSCRIBE
English | en Español | auf Deutsch | in Italiano | 中文 | in India
technology review
Published by MIT
Advertisement
The Future of Energy Webcast at EmTech 2010
Watch On Demand Now.
technology review
BLOGS
search SEARCH
HOME COMPUTING WEB COMMUNICATIONS ENERGY MATERIALS BIOMEDICINE BUSINESS BLOGS VIDEO
MAGAZINE NEWSLETTERS

The Physics arXiv Blog

Origami Crease Pattern Design Proved NP-Hard

Origamists have long suspected their art is computationally hard. Now they've proved it.

KFC 08/11/2010
30 COMMENTS



Some 20 years or so, various individuals recognised that the problem of folding a square sheet of paper into an arbitrary 3D shape had many similarities to problems in computational geometry. These practitioners began developing algorithms that automatically generate the crease patterns that turn a flat sheet into an intricate shape of your choice. Thanks to this and the magical power of modern computing

BIO

The Physics arXiv Blog produces daily coverage of the best new ideas from an online forum called the Physics arXiv on which scientists post early versions of their latest ideas. Contact me at KentuckyFC @ arxivblog.com

Advertisement



RECENT POSTS FROM ARXIV BLOG

The Frightening Link Between Phase Changes And Terrorism

Galactic GPS Put Through Its Paces

Origami

arXiv:1008.1224v2 [cs.CG] 20 Sep 2010

Circle Packing for Origami Design Is Hard

Erik D. Demaine* Sándor P. Fekete† Robert J. Lang‡

1 Introduction

Over the last 20 years, the world of origami has been changed by the introduction of design algorithms that bear a close relationship to, if not outright ancestry from, computational geometry. One of the first robust algorithms for origami design was the circle/river method (also called the tree method) developed independently by Lang [7–9] and Meguro [12,13]. This algorithm and its variants provide a systematic method for folding any structure that topologically resembles a graph theoretic weighted tree. Other algorithms followed, notably one by Tachi [15] that gives the crease pattern to fold an arbitrary 3D surface.

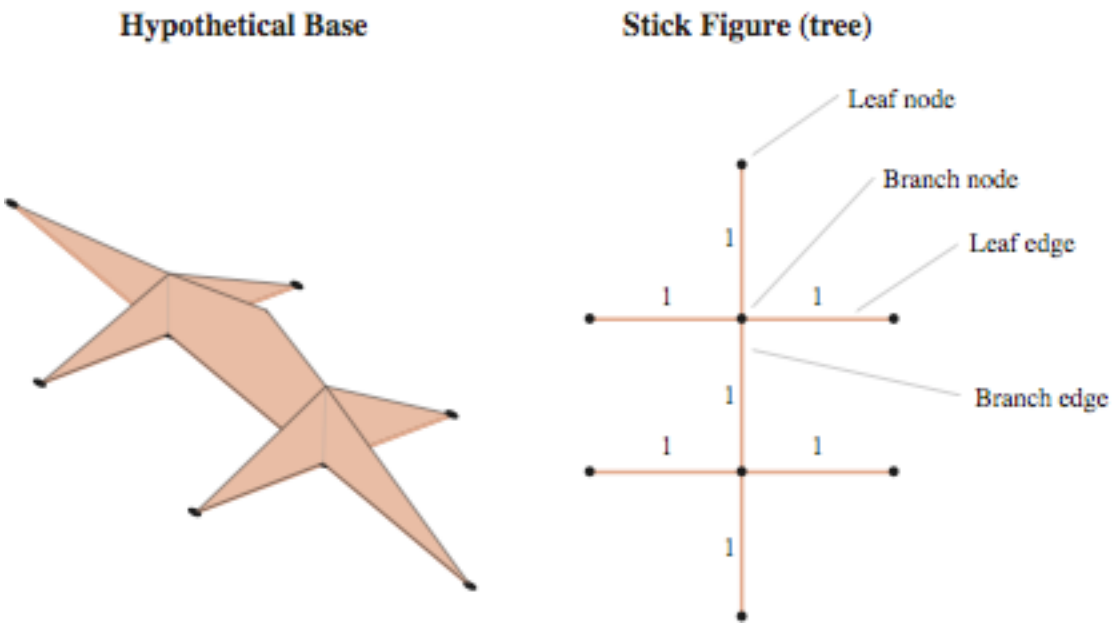
Hopes of a general approach for efficiently solving all origami design problems were dashed early on, when Bern and Hayes showed in 1996 that the general problem of crease assignment — given an arbitrary crease pattern, determine whether each fold is mountain or valley — was NP-complete [1]. In fact, they showed more: given a complete crease assignment, simply determining the stacking order of the layers of paper was also NP-complete. Fortunately, while crease assignment in the general case is hard, the crease patterns generated by the various design algorithms carry with them significant extra information associated with each crease, enough extra information that the problem of crease assignment is typically only polynomial in difficulty. This is certainly the case for the tree method of design [3].

Designing a model using the tree method (or one of its variants) is a two-step process: the first step involves solving an optimization problem where one solves for certain key vertices of the crease pattern. The second step constructs creases following a geometric prescription and assigns their status as mountain, valley, or unfolded. The process of constructing the creases and assigning them is definitely polynomial in complexity; but, up to now, the computational complexity of the optimization was not established.

There were reasons for believing that the optimization was, in principle, computationally intractable. The conditions on the vertex coordinates in the

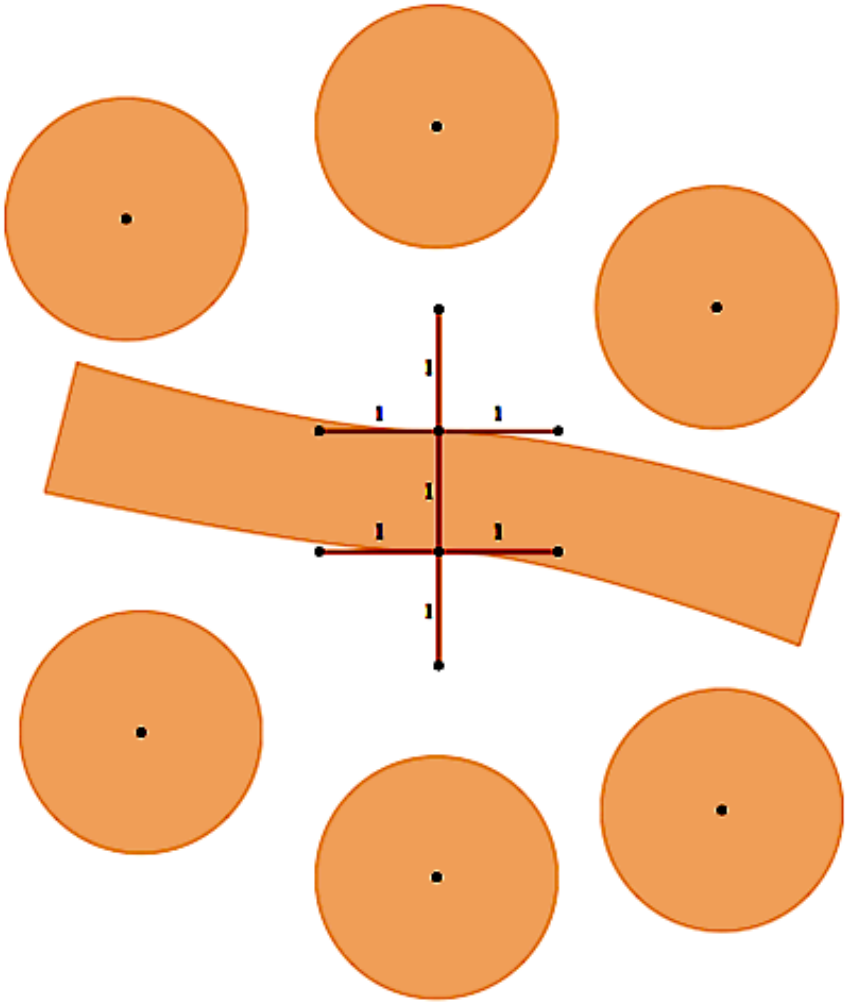
*edemaine@mit.edu.
†s.fekete@tu-bs.de.
‡robert@langorigami.com.

Schritt 1 - Baumkonstruktion



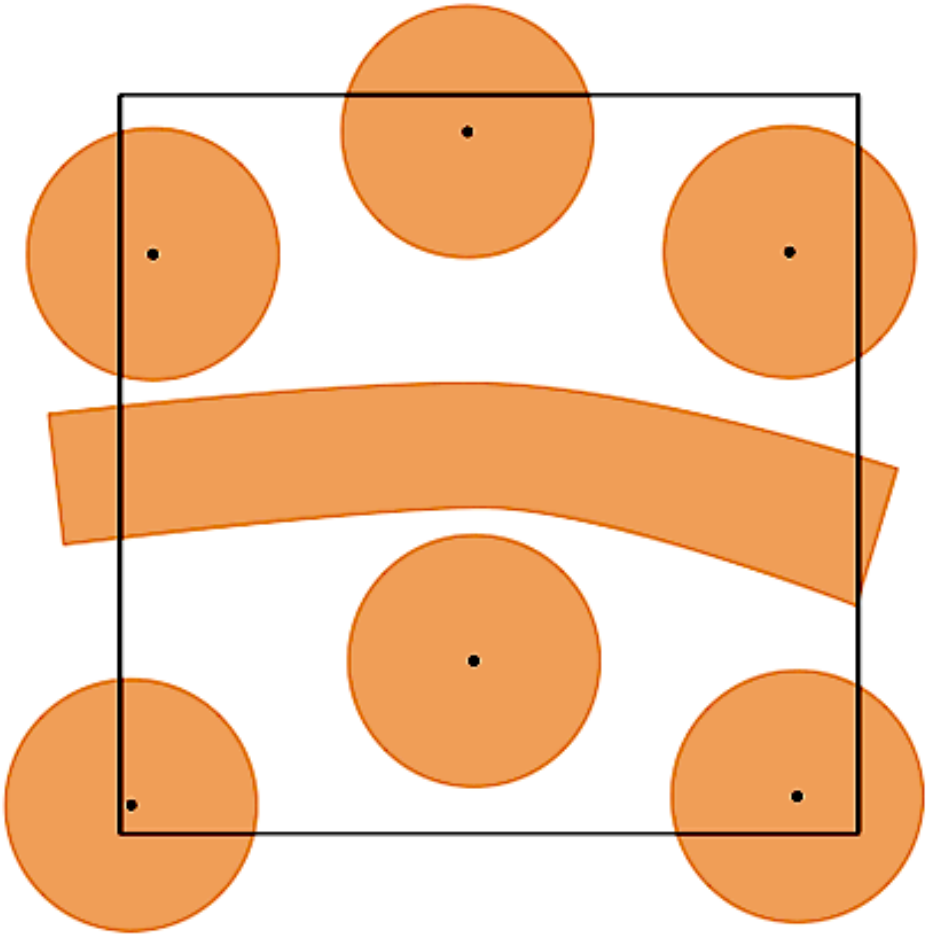
- Jede Kante repräsentiert eine Klappe.
- Jeder Knoten ist eine Klappenspitze oder eine Verbindung von Klappen.
- Endklappen entsprechen Blattkanten im Baum.

Schritt 2 – Von Bäumen zu Flüssen



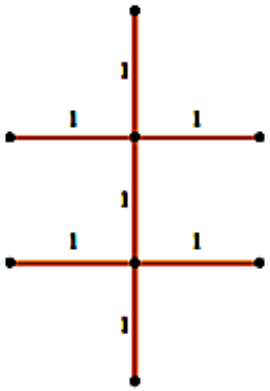
- Endklappen werden zu Kreisen
- Verzweigungskanten werden zu Flüssen
- Radius/Breite eines Kreises/Flusses ist die Länge einer Klappe.

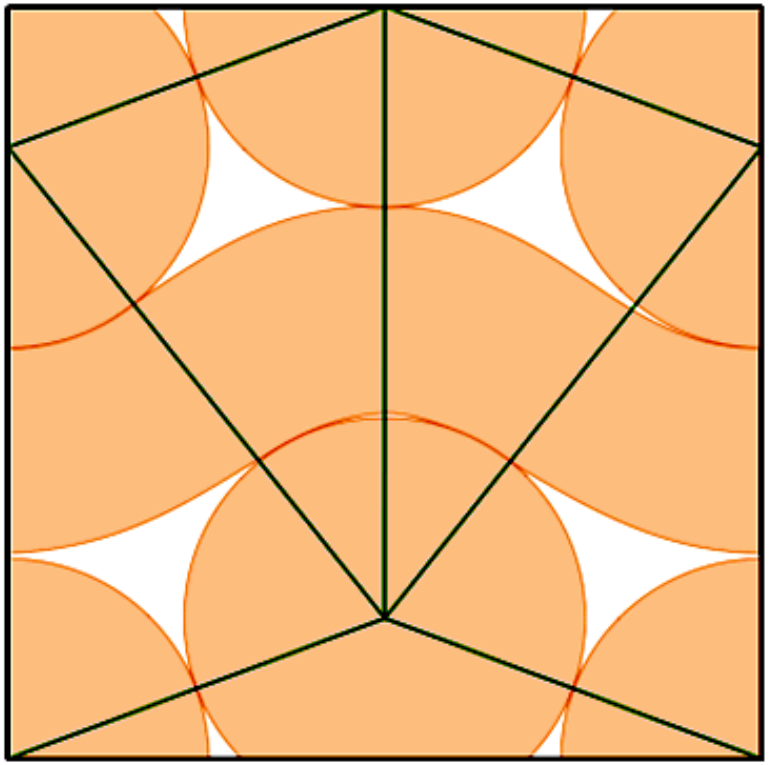
Schritt 3 – Kreispackung in Quadrat



- Packe Mittelpunkte in ei Quadrat, dann vergrößere die Objekte (oder schrumpfe das Quadrat).
- Kreismittelpunkte müssen innerhalb des Quadrates bleiben (Mittelpunkte sind Klappenspitzen).

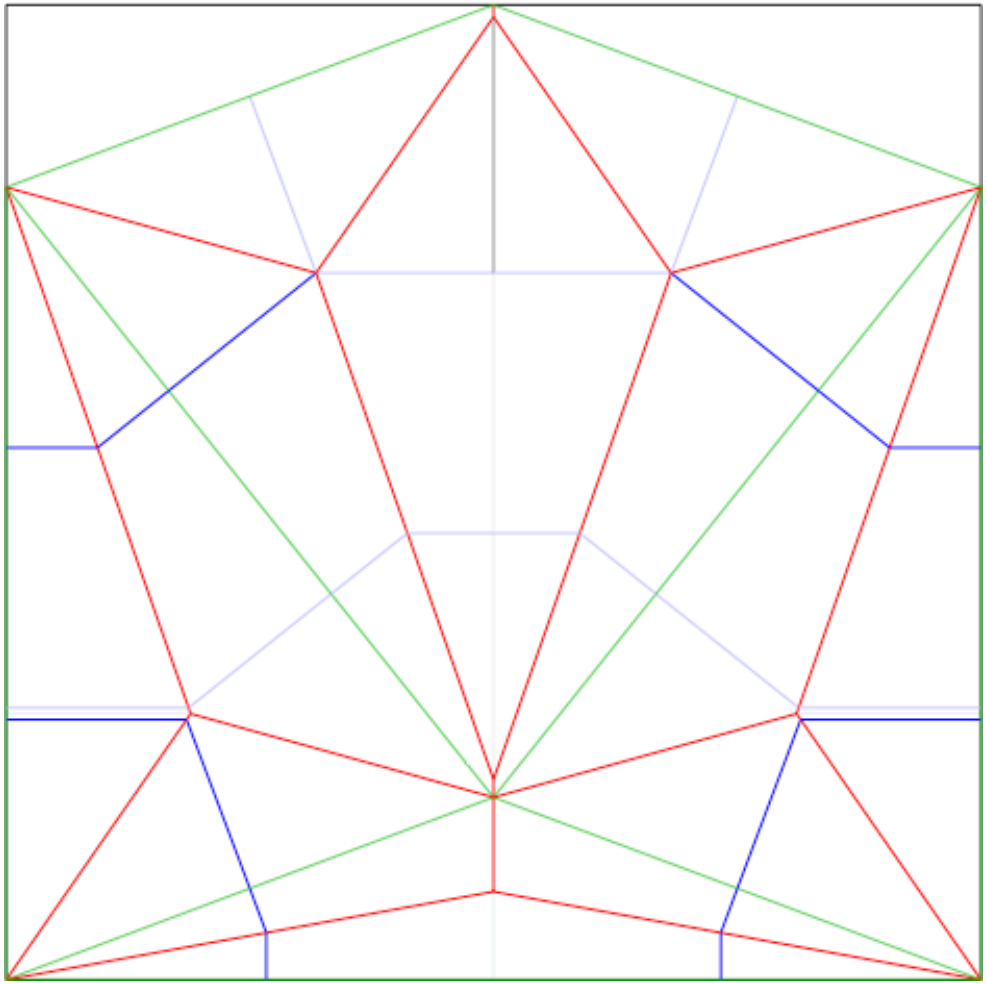
Schritt 4 – Dualgraph bilden





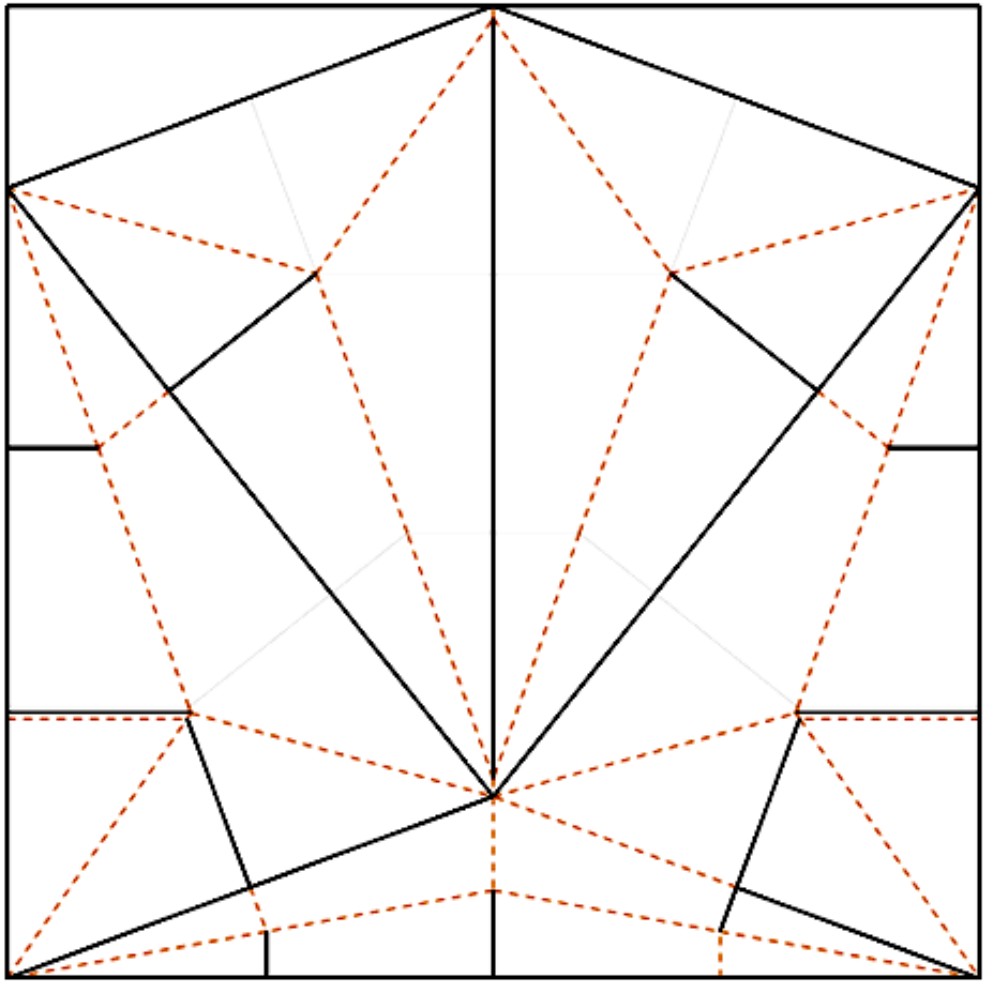
- Resultierende Polygone sind alle konvex.
- Keine “losen” Kreise erlaubt
- Verbindungen sind axiale Faltungen

Schritt 5 – Quadrat mit Faltungen füllen



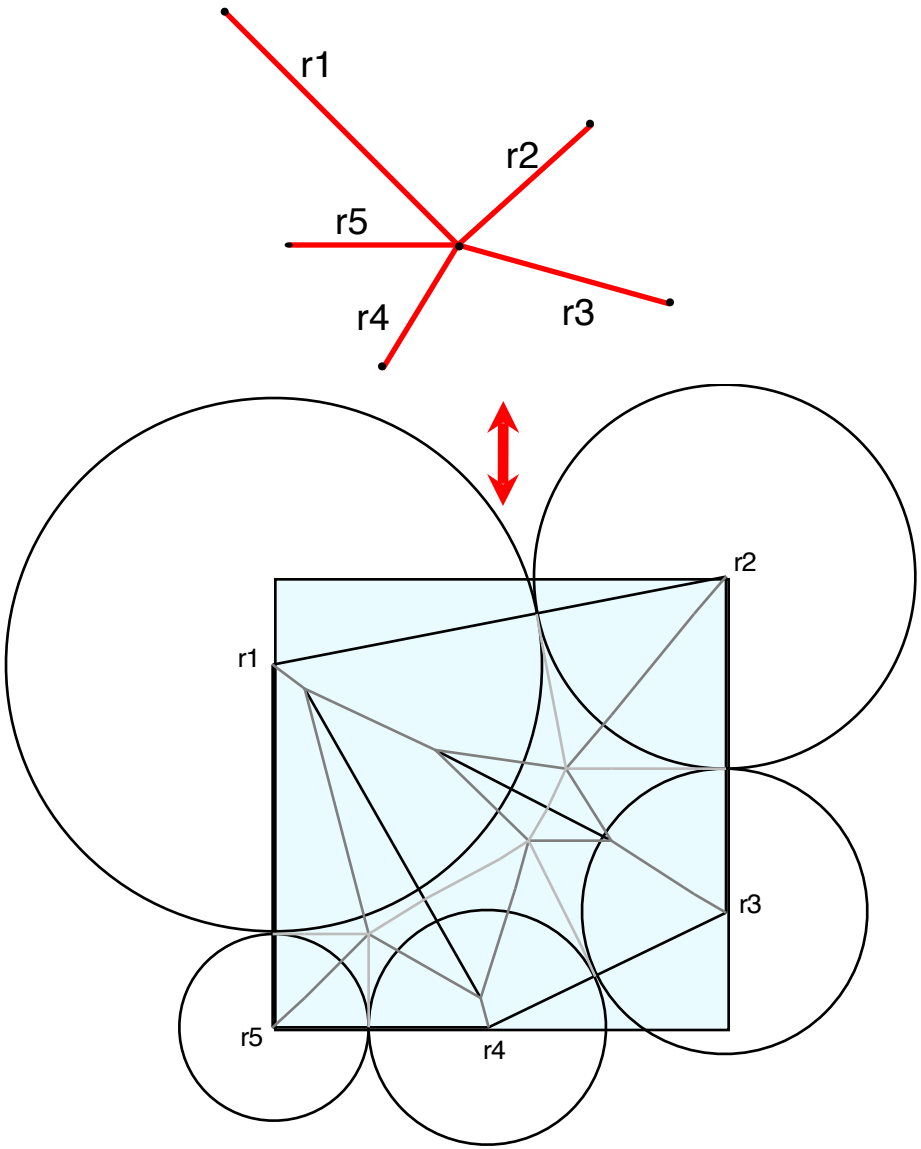
- Axial (grün)
- Kante (rot)
- Zwickel (grau)
- Scharnier (blau)

Schritt 6 – Faltungen zuordnen



- Ein exakter Algorithmus existiert
  - Implementiert in TreeMaker
  - Schneller; Einfache Regeln anwenden und die Ausnahmen behandeln
  - Axial = fast immer Berg
  - Kante = immer Tal
  - Zwickel = immer Berg
  - Scharnier = Berg, Tal, flach, abhängig von Klappenrichtung

Sterne und Kreispackungen



- Die Pfadbedinungen für einen Stern sind äquivalent zum Problem, die Mittelpunkte einer Menge von Kreisen in ein Quadrat zu packen.
- Der Kreisradius entspricht jeweils der Kantenlänge.

Komplexität: 3-Partition



Gegeben:

3k Zahlen $\frac{1}{4} < ? < \frac{1}{2}$

Gesucht:

Eine Partition in gleichgroße Tripel – d.h., eine Packung in *k* Einheitscontainer.

Komplexität: 3-Partition



Gegeben:

3k Zahlen $\frac{1}{4} < \boxed{?} < \frac{1}{2}$

Gesucht:

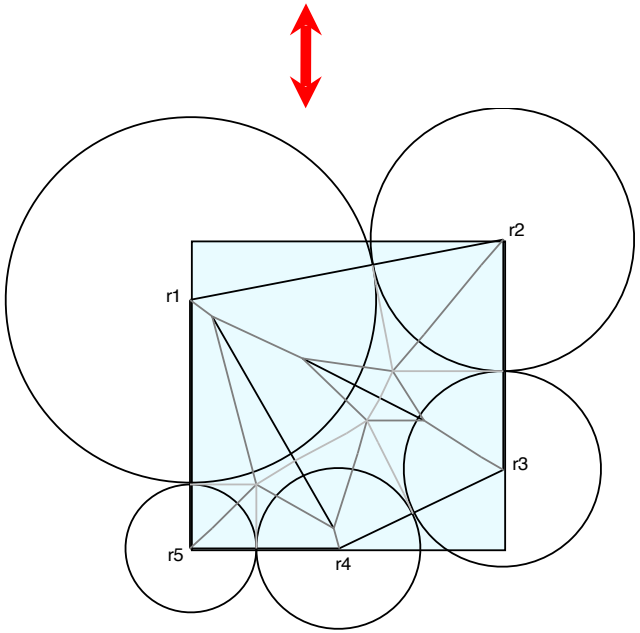
Eine Partition in gleichgroße Tripel – d.h., eine Packung in *k* Einheitscontainer.

Bekannt:

3-Partition ist NP-schwer.

Komplexität: Beweis von NP-Schwere





Gegeben:

3k Zahlen $\frac{1}{4} < \boxed{?} < \frac{1}{2}$

Transformiere in:

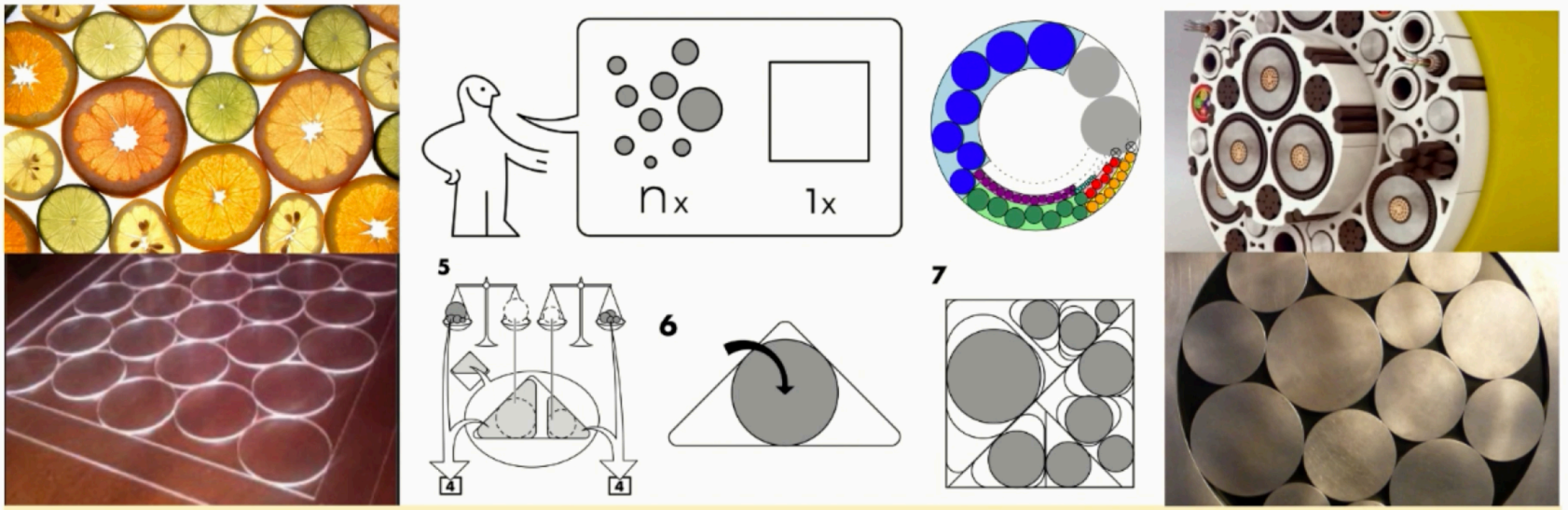
eine Kreispackungsinstanz die gelöst werden kann, gdw die 3-Partitioninstanz lösbar ist.

Konsequenz 1:

Falls es einen polynomiellen Algorithmus für Kreispacken gibt, dann ist P=NP.

Konsequenz 2:

Falls es einen effizienten Algorithmus für Origami-Design gibt, ist P=NP



Packing Geometric Objects with Optimal Worst-Case Density

Aaron Becker, Sándor P. Fekete, Phillip Keldenich,
Sebastian Morr, Christian Scheffer