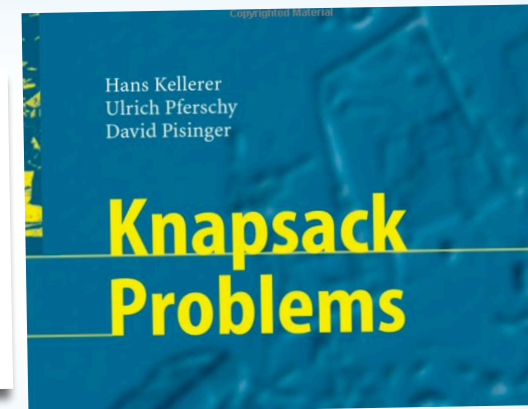




$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ &&& x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$



1 Knapsack-Probleme

*Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2026*

Prof. Dr. Sándor Fekete

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte
- Noch 44 Punkte zum Bestehen
- Restliche Aufgaben...

Restliche Aufgaben

The diagram shows 12 stacks of three boxes each, representing a student's performance in a 30-minute exam. Each stack contains three numbers: 'Nummer' (top), 'Minuten' (middle), and 'Punkte' (bottom). The stacks are arranged in a scattered pattern. A red box at the bottom right contains the text 'Kann Knut die Klausur bestehen?'.

Nummer	Minuten	Punkte	
1	20	3	
2	32	3	
3	40	10	
4	8	5	
5	16	2	
6	4	4	
7	32	2	
8	40	9	
9	8	2	
10	32	5	
11	28	3	
12	20	9	
13	16	24	4
14	20	3	
15	40	10	

Kann Knut die Klausur bestehen?

Kann Knut die Klausur bestehen?

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 44$$

Knut kann die Klausur bestehen!

Teilaufgaben?!

Problem 1.3 (FRACTIONAL KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe $z_i > 0$ Gewinn $p_i > 0$
- Größenschranke Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in [0, 1]$$

sodass

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 46$$

$$x_{15} = 0,6$$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $x_{\pi(j)} := 1$

4: $j := j + 1$

5: Setze $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

6: **return**

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3.*

Beweis:

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^n z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

- (1) Wir bekommen eine zulässige Lösung.
- (2) Wir bekommen eine optimale Lösung.

(1) Zulässigkeit



Setze $j = 1$.
 2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
 3: $x_{\pi(j)} := 1$
 4: $j := j + 1$
 5: Setze $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
 6: **return**

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 46$$

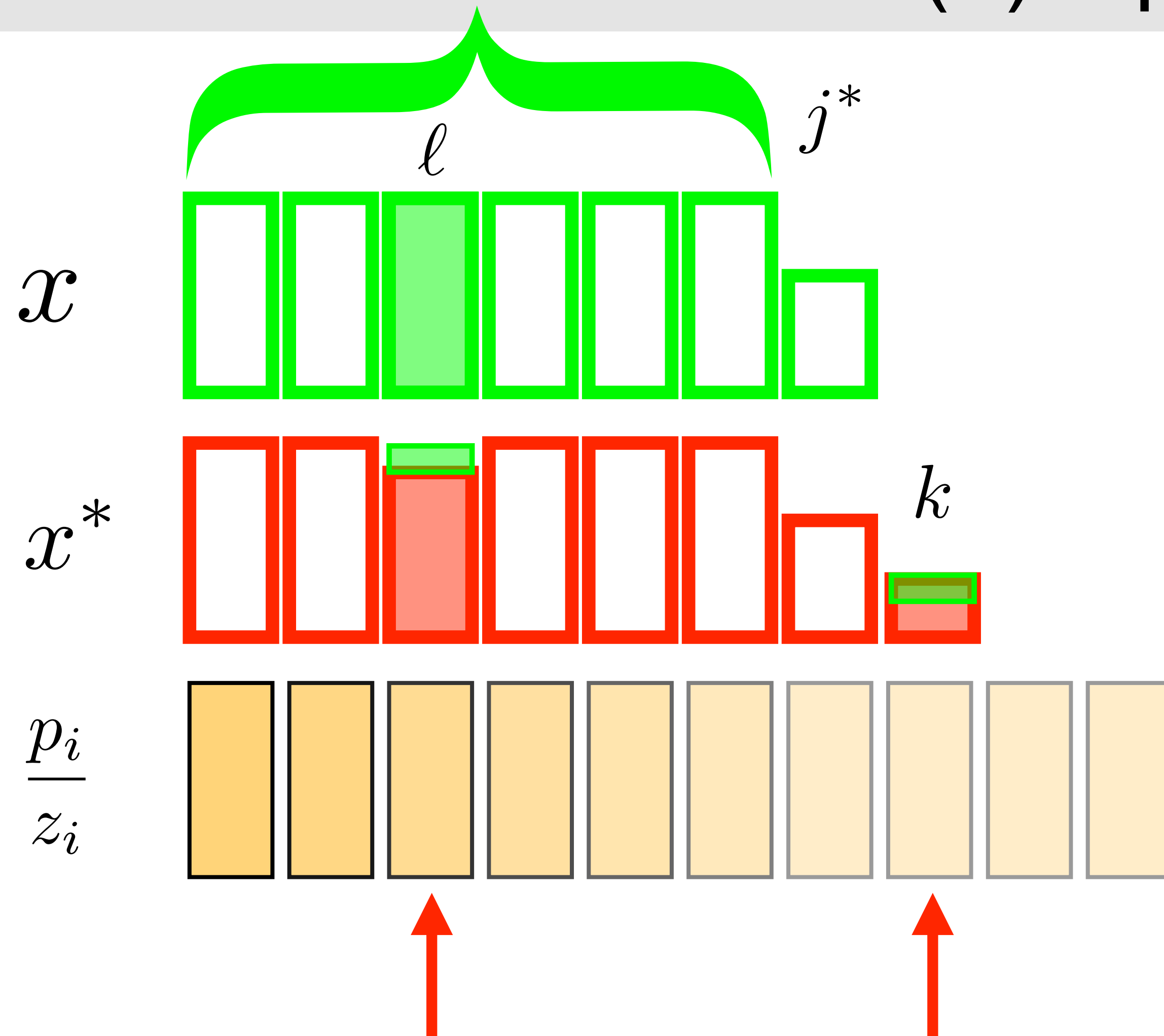
$$x_{15} = 0,6$$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$ und $\sum_{i=1}^{j^*} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} = Z$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^n x_i p_i < \sum_{i=1}^n x_i^* p_i$$

$$p_i > 0 :$$

$$\implies \exists k \in \{1, \dots, n\} : x_{\pi(k)} < x_{\pi(k)}^*$$

$$\implies \exists k \in \{j^*, \dots, n\} : x_{\pi(k)} < x_{\pi(k)}^*$$

$$\implies \exists \ell \in \{1, \dots, j^*\} : x_{\pi(\ell)} > x_{\pi(\ell)}^*$$

x^* nicht optimal!

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} z_i = \textit{Maximal}$$

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschränke treffen

Problem 1.8 (SUBSET SUM).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Zielgröße Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i = Z$$

Spezialfall³: Partition

Problem 1.9 (PARTITION).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \notin S} z_i$$

Beispiel

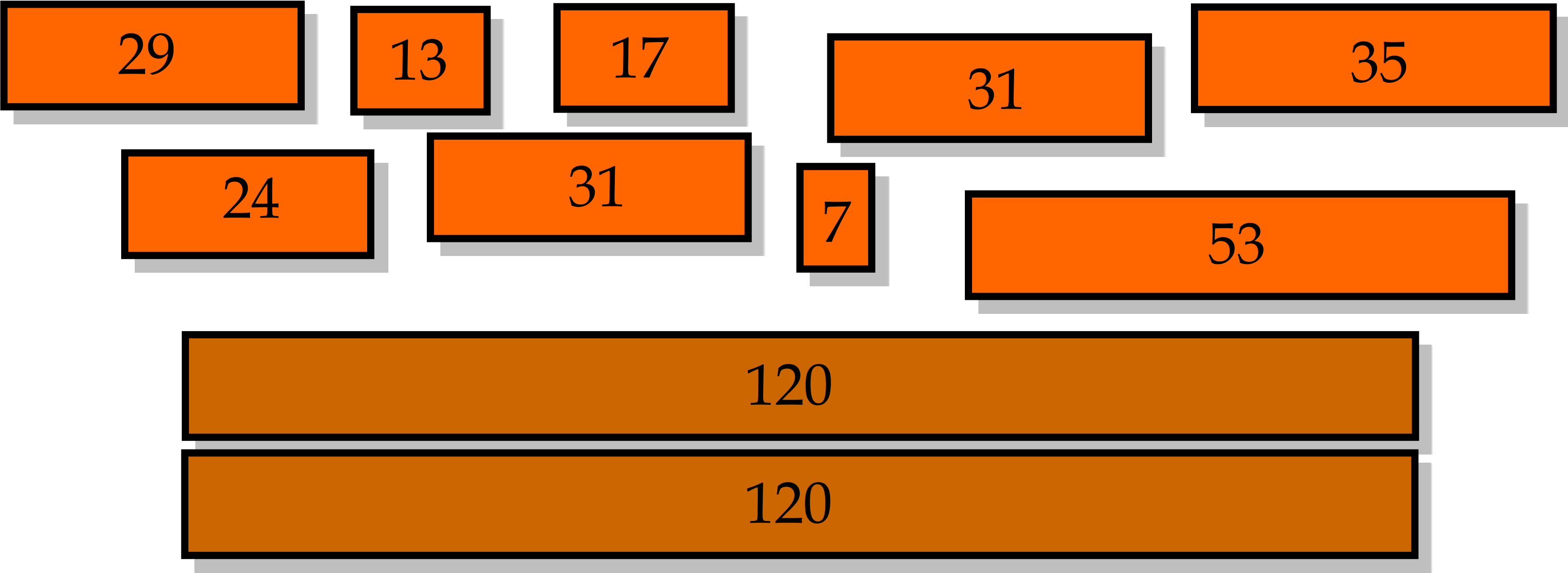
Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

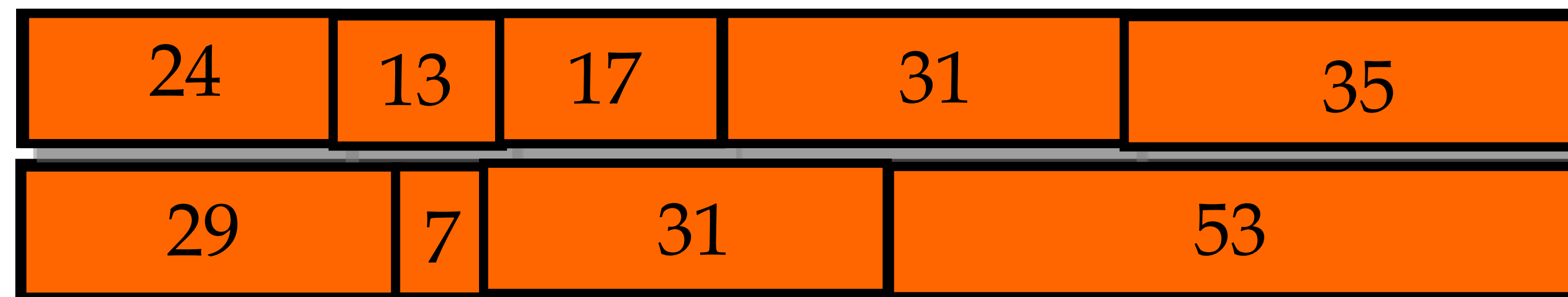
Gesamtsumme: 240

Finde Aufteilung in zwei gleiche Teilmengen!

Ein Bild hilft



Ein Bild hilft

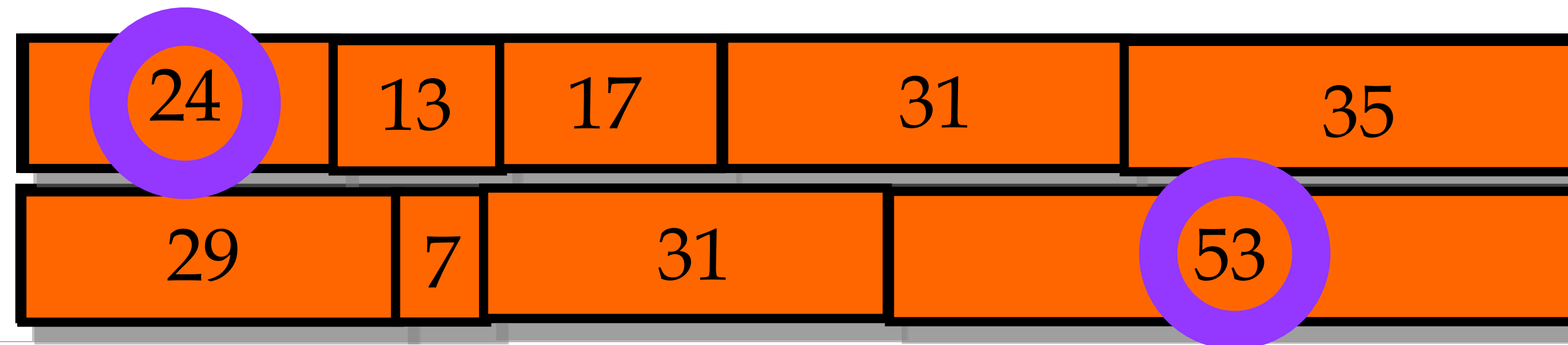


Ein Bild hilft

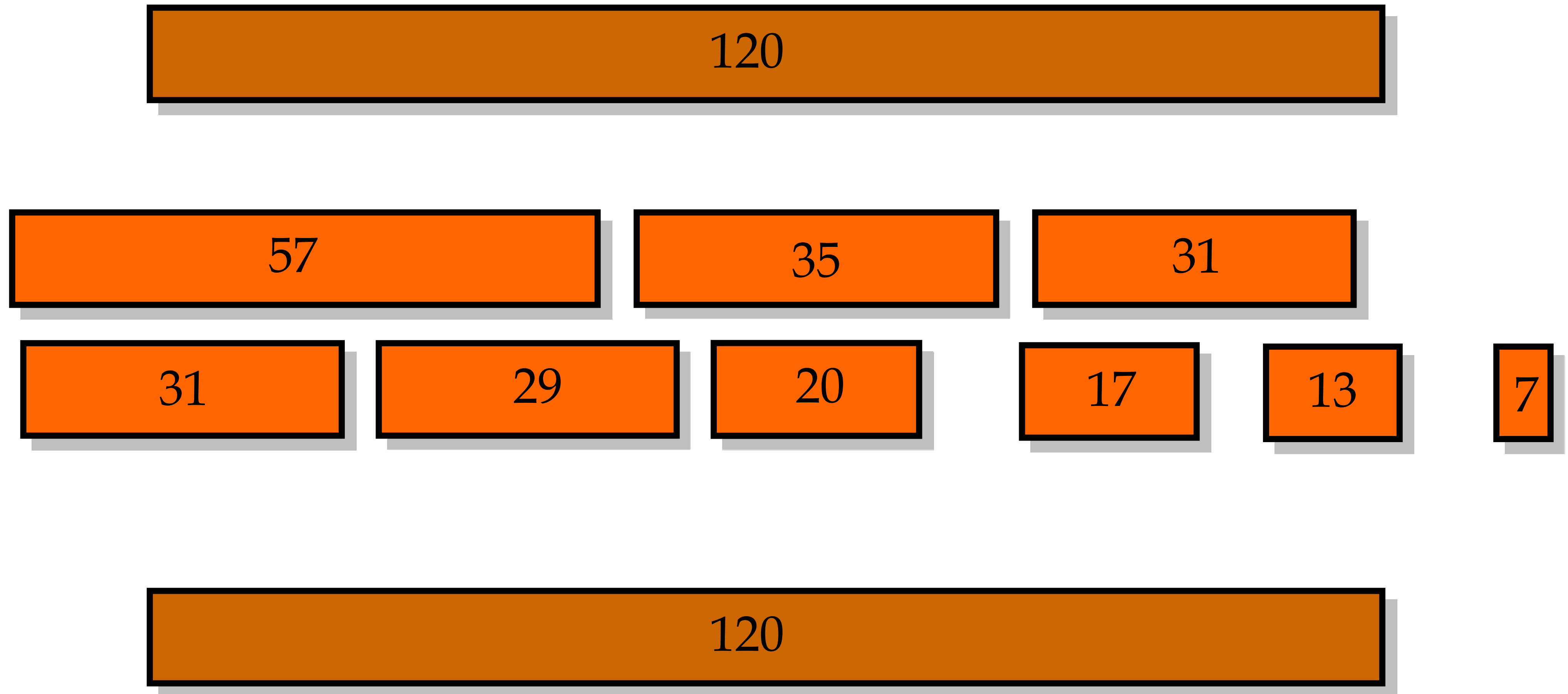
Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

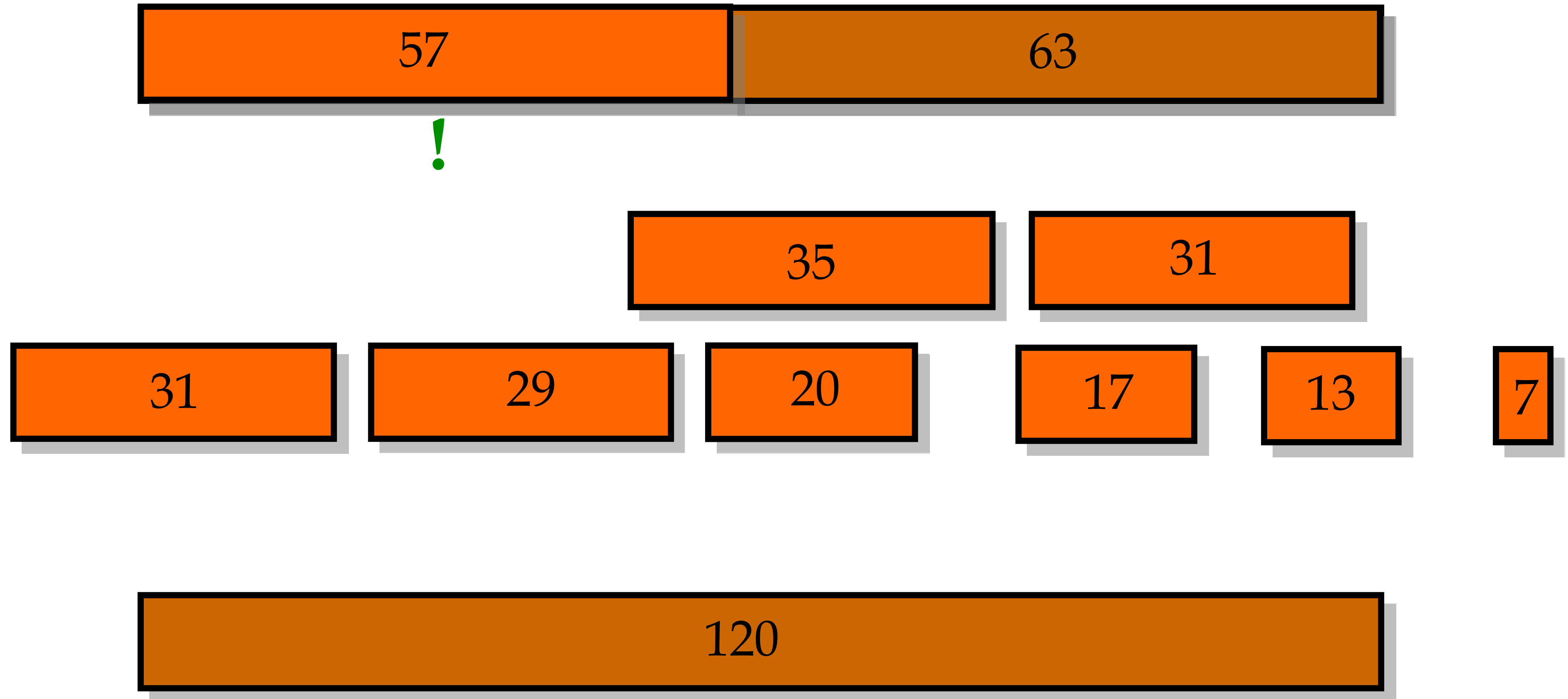
Gesamtsumme: 240



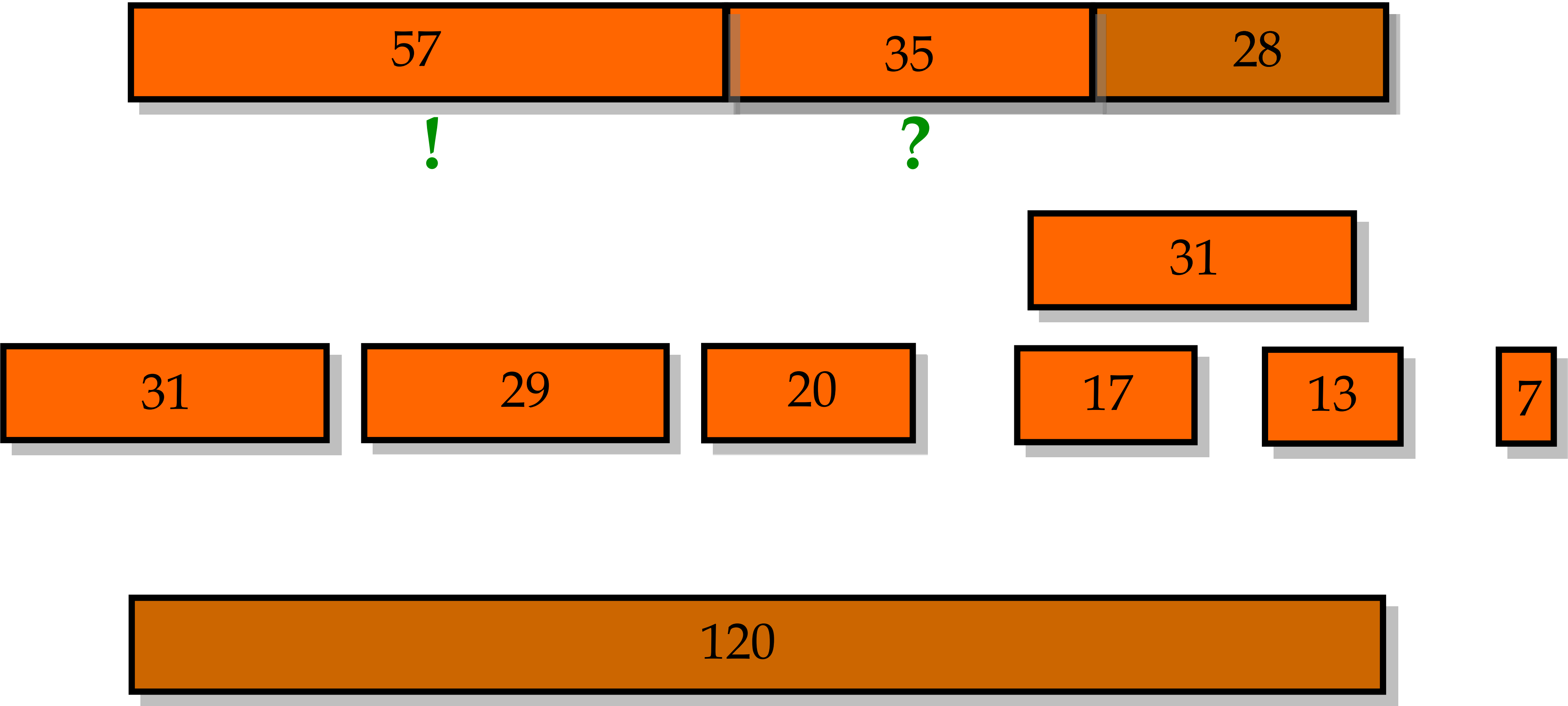
Keine Lösung?!



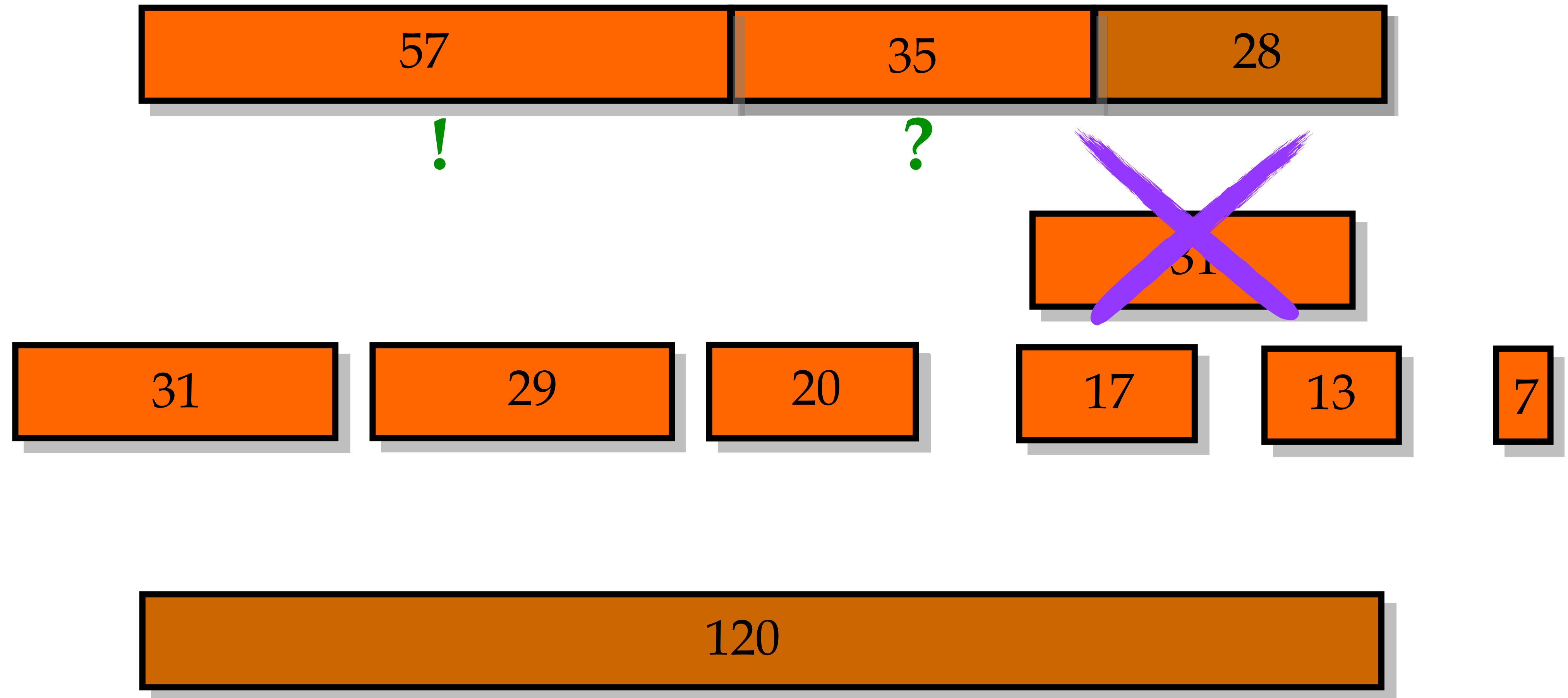
Keine Lösung?!



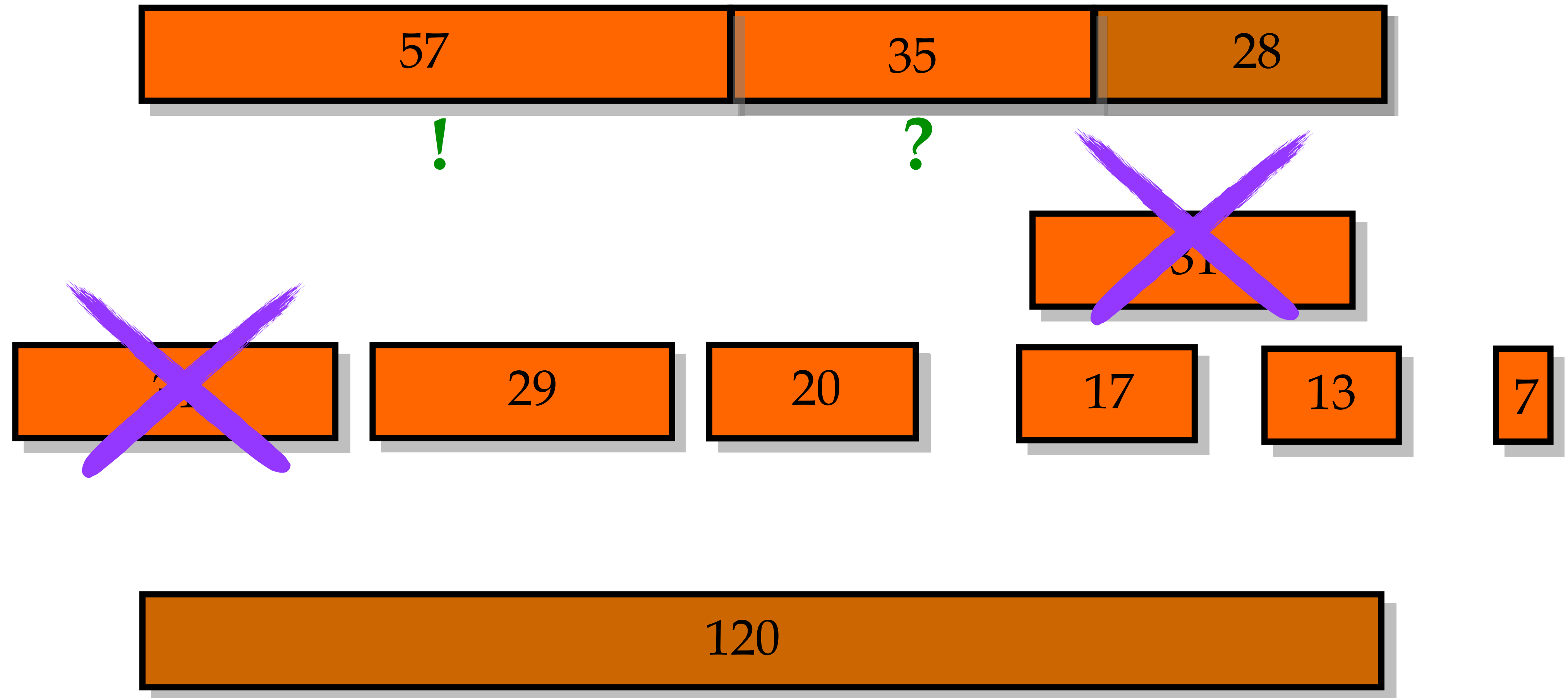
Keine Lösung?!



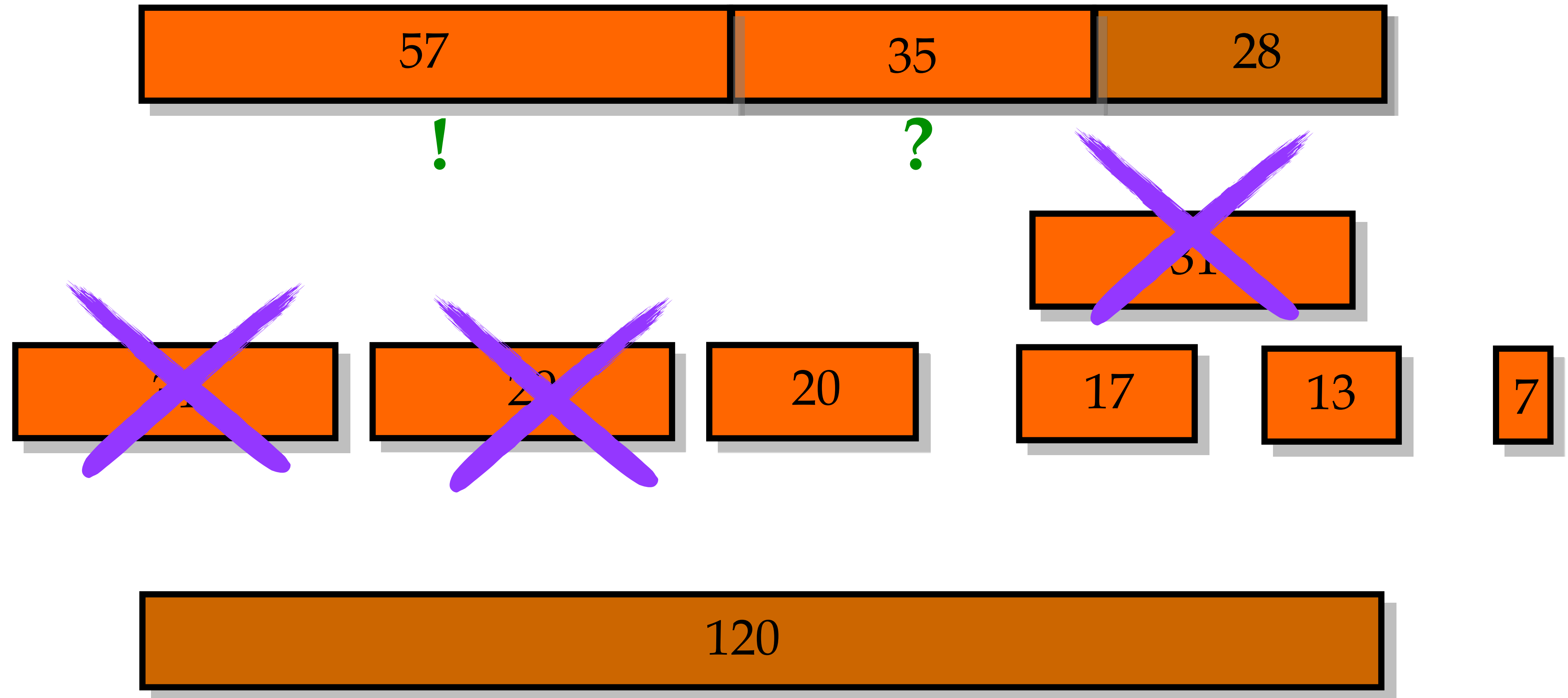
Keine Lösung?!



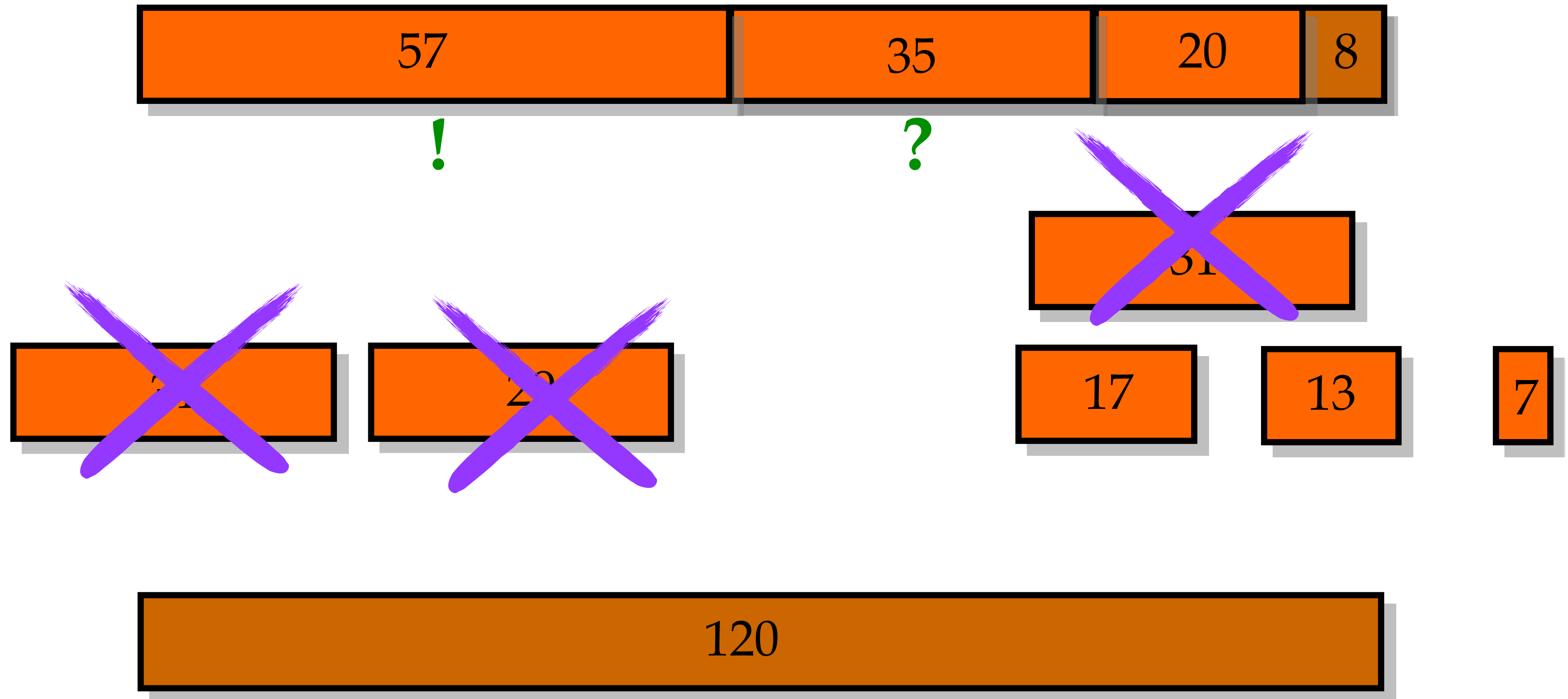
Keine Lösung?!



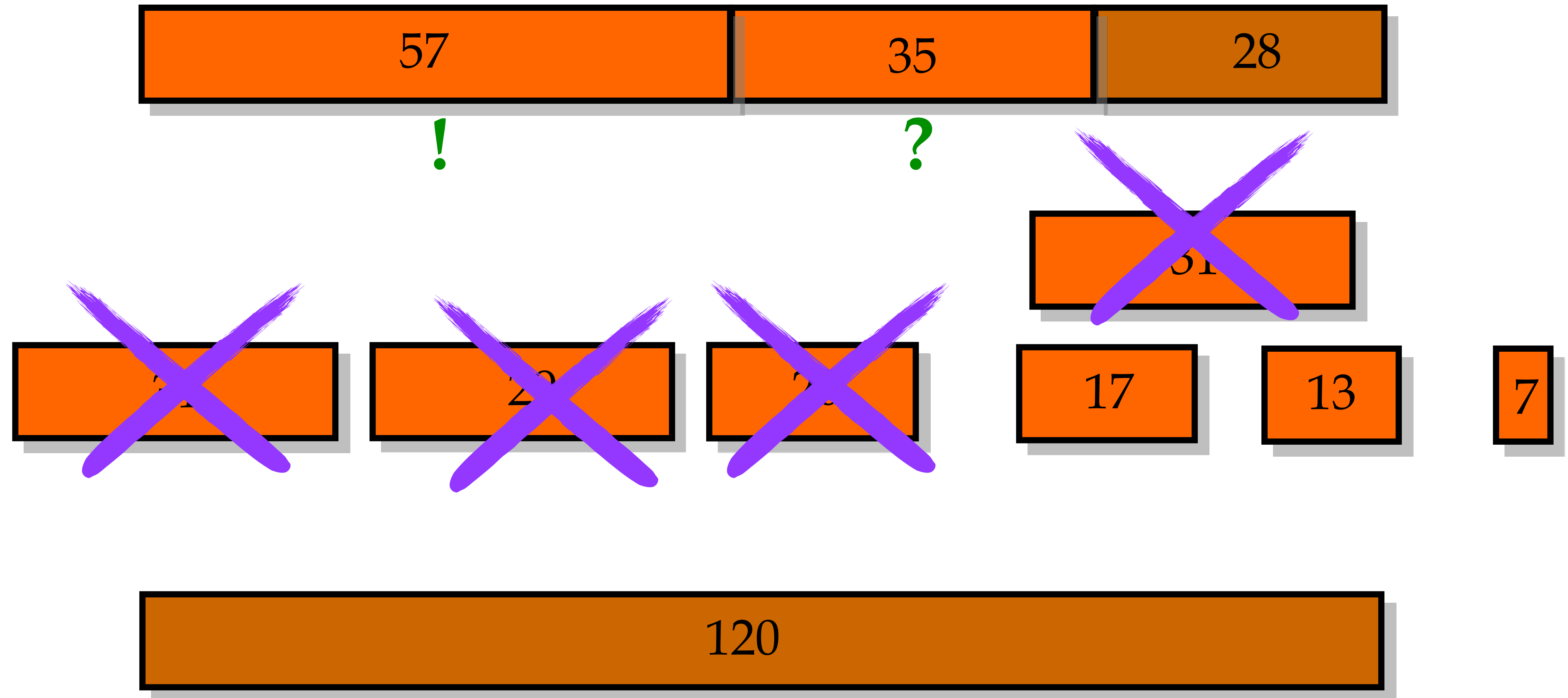
Keine Lösung?!



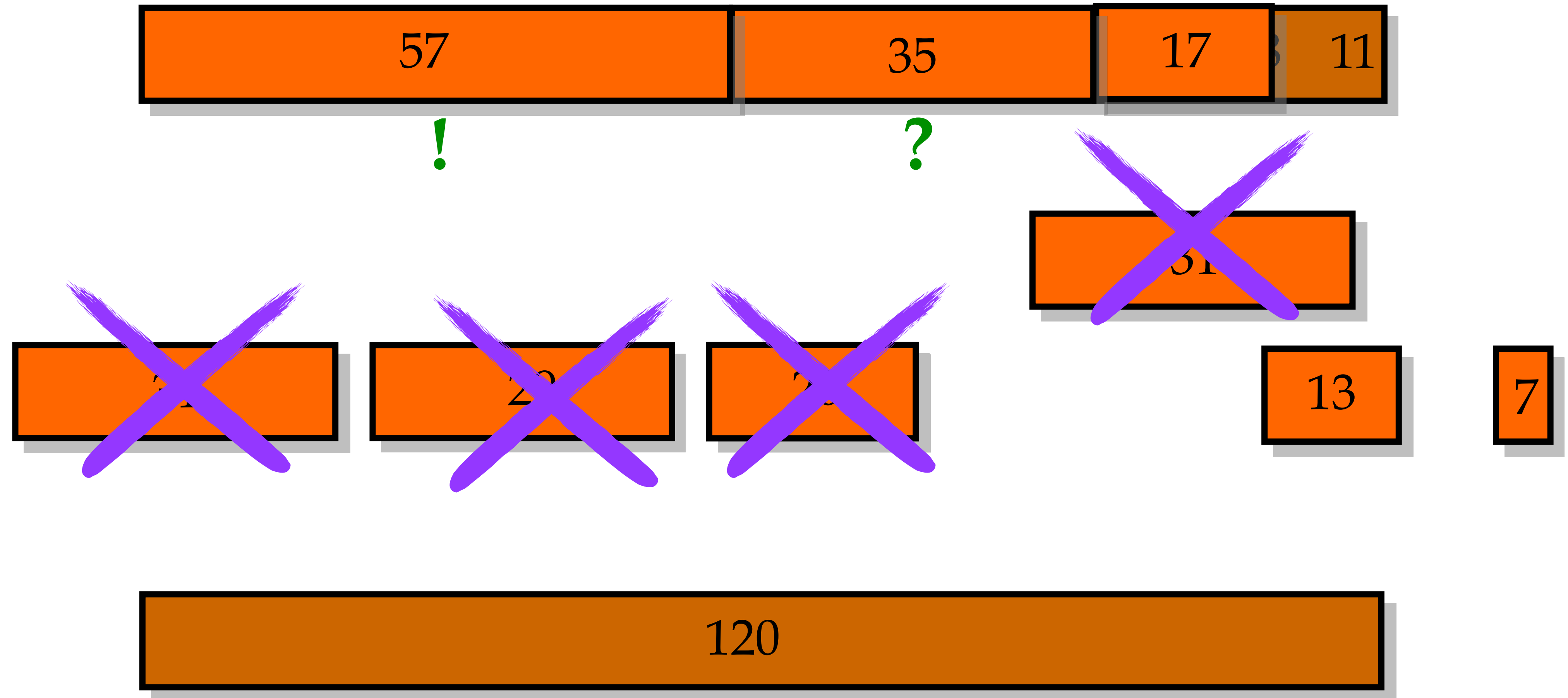
Keine Lösung?!



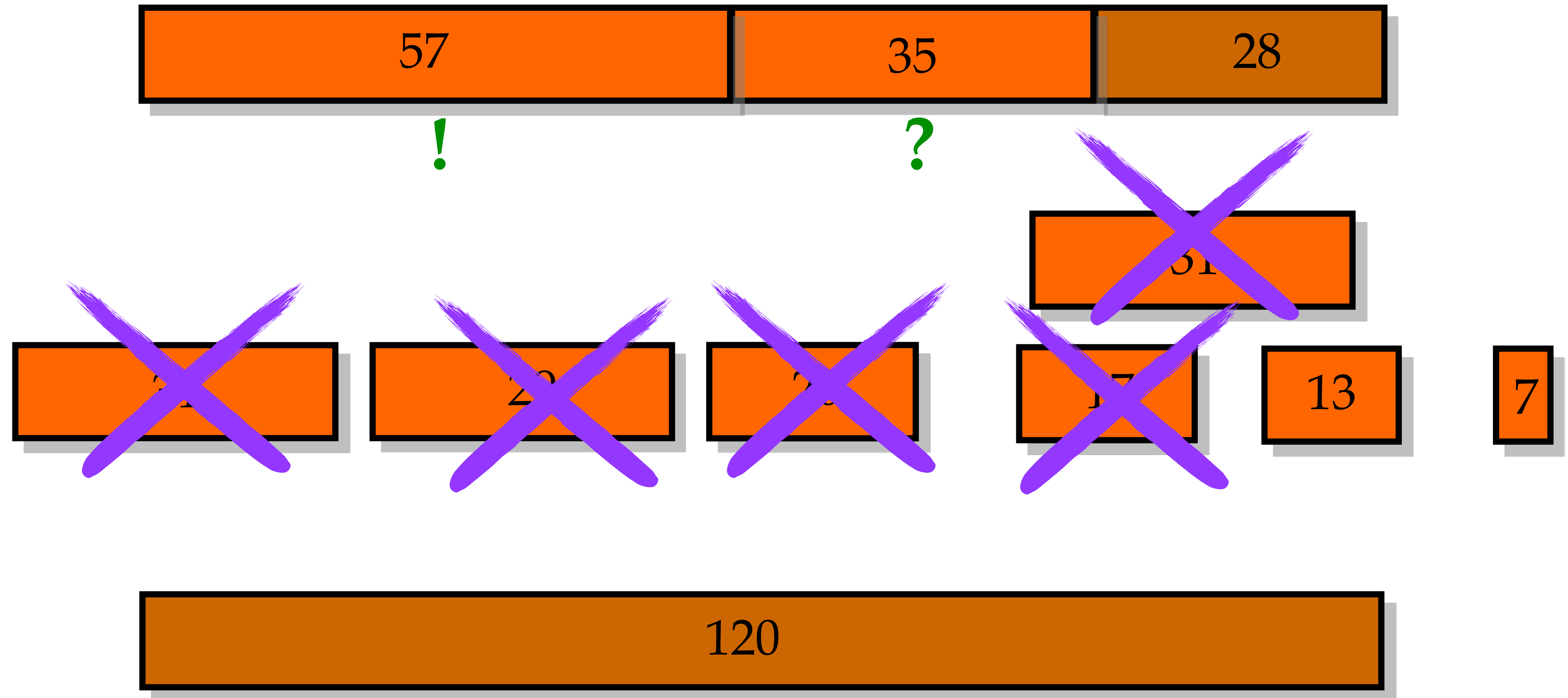
Keine Lösung?!



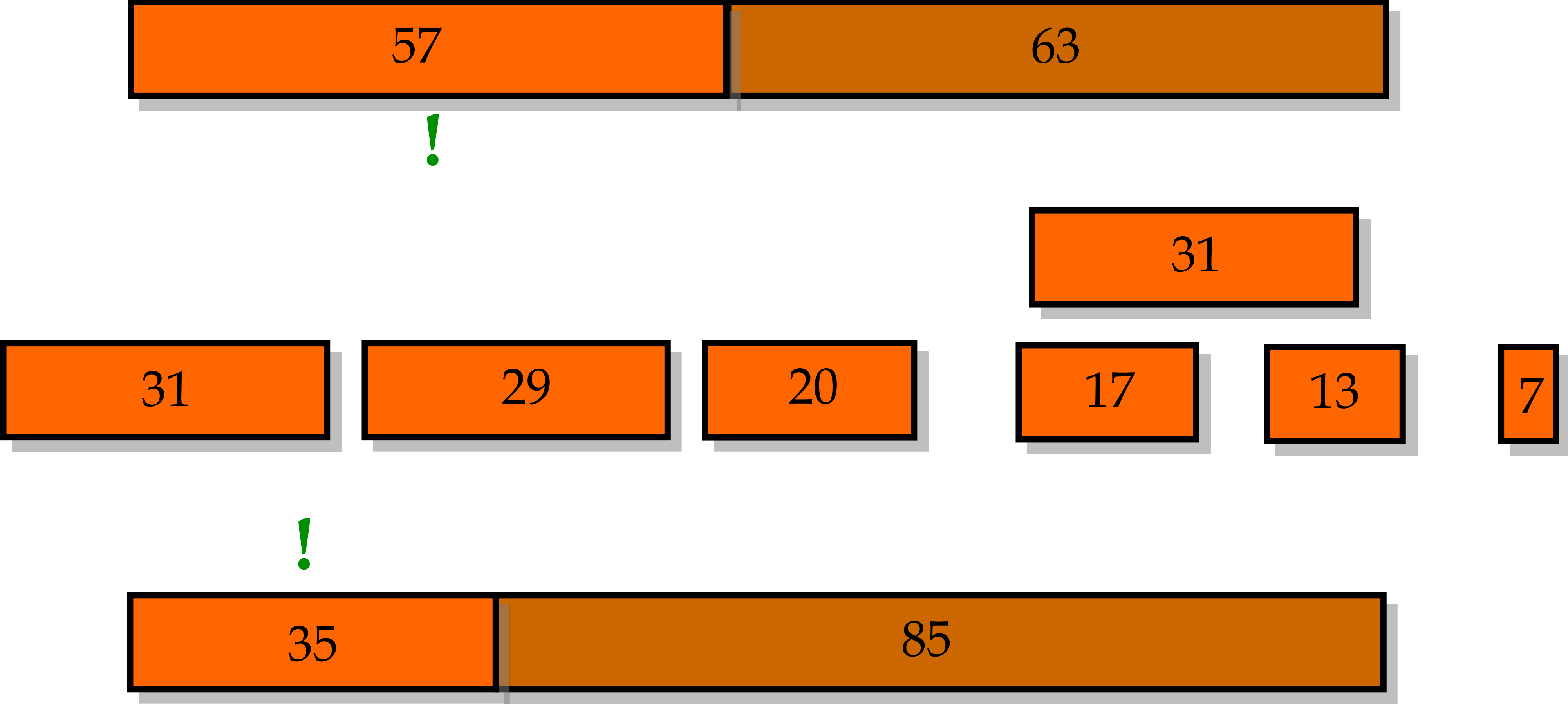
Keine Lösung?!



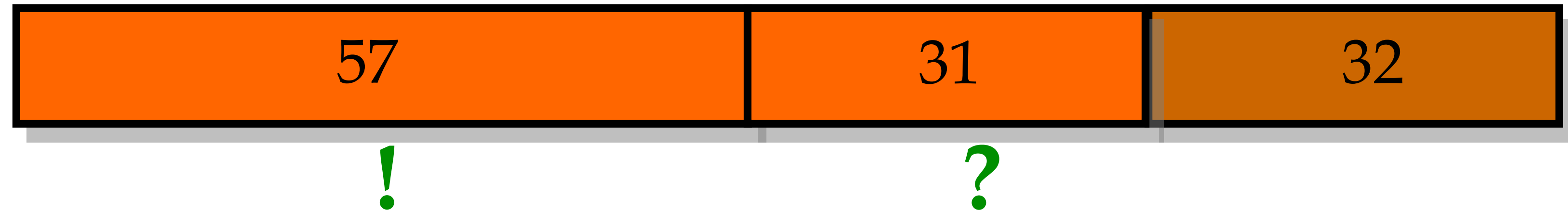
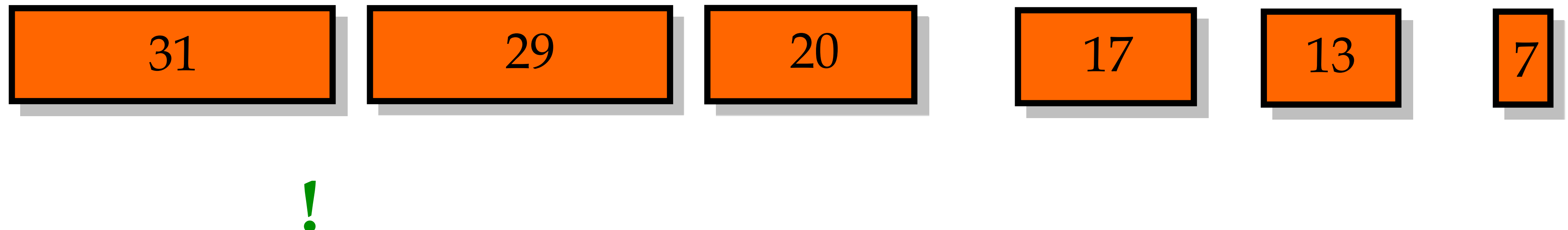
Keine Lösung?!



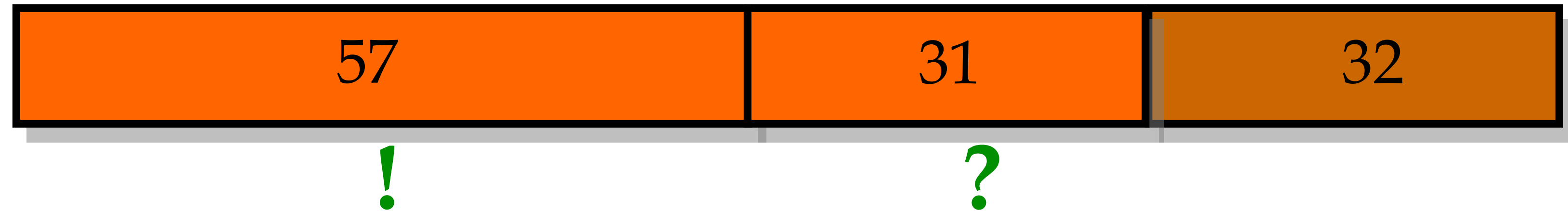
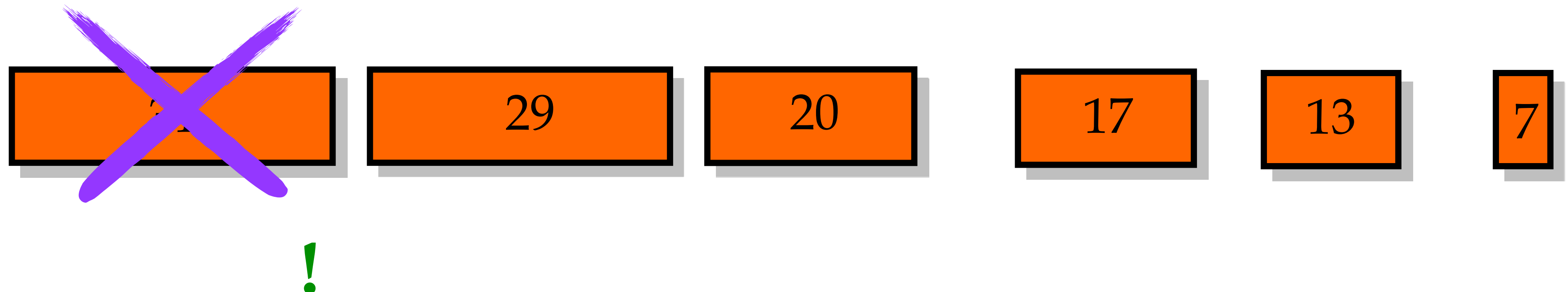
Keine Lösung?!



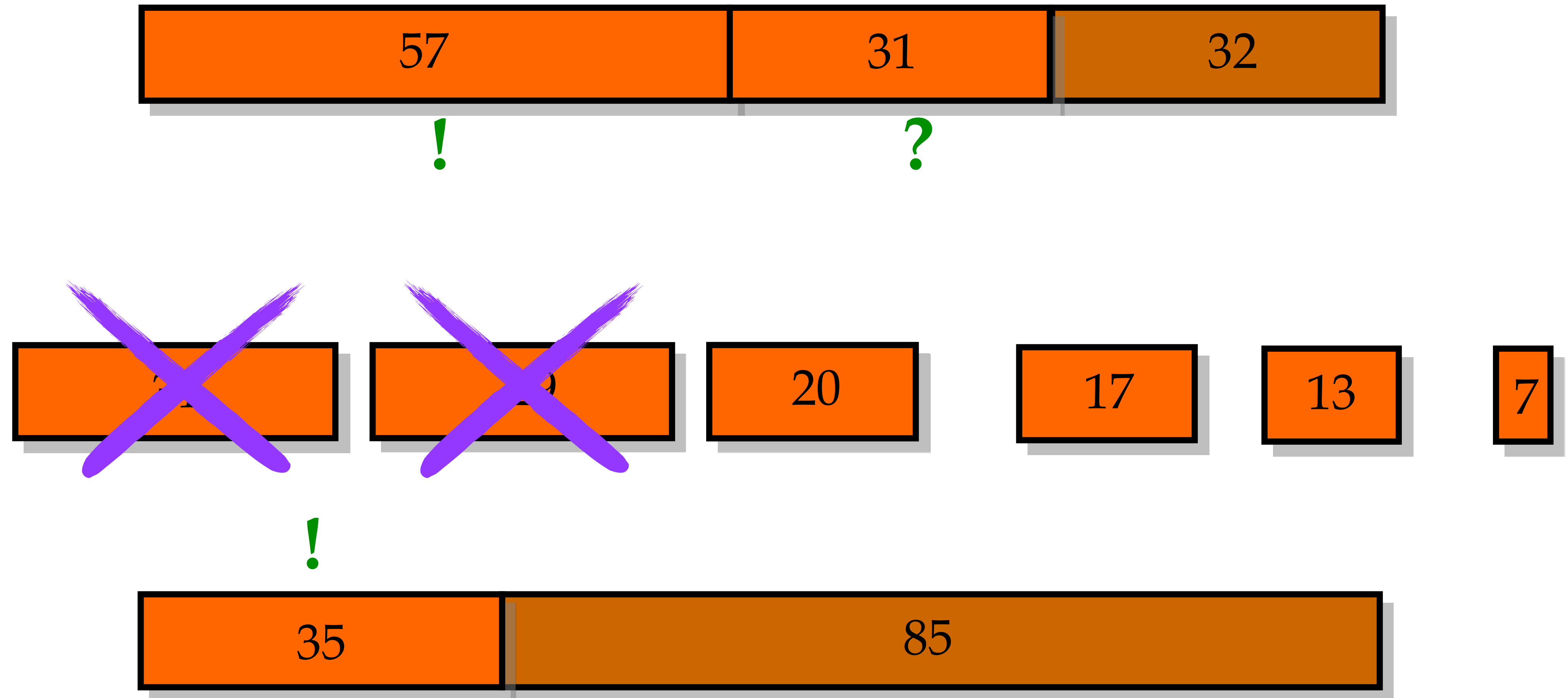
Keine Lösung?!



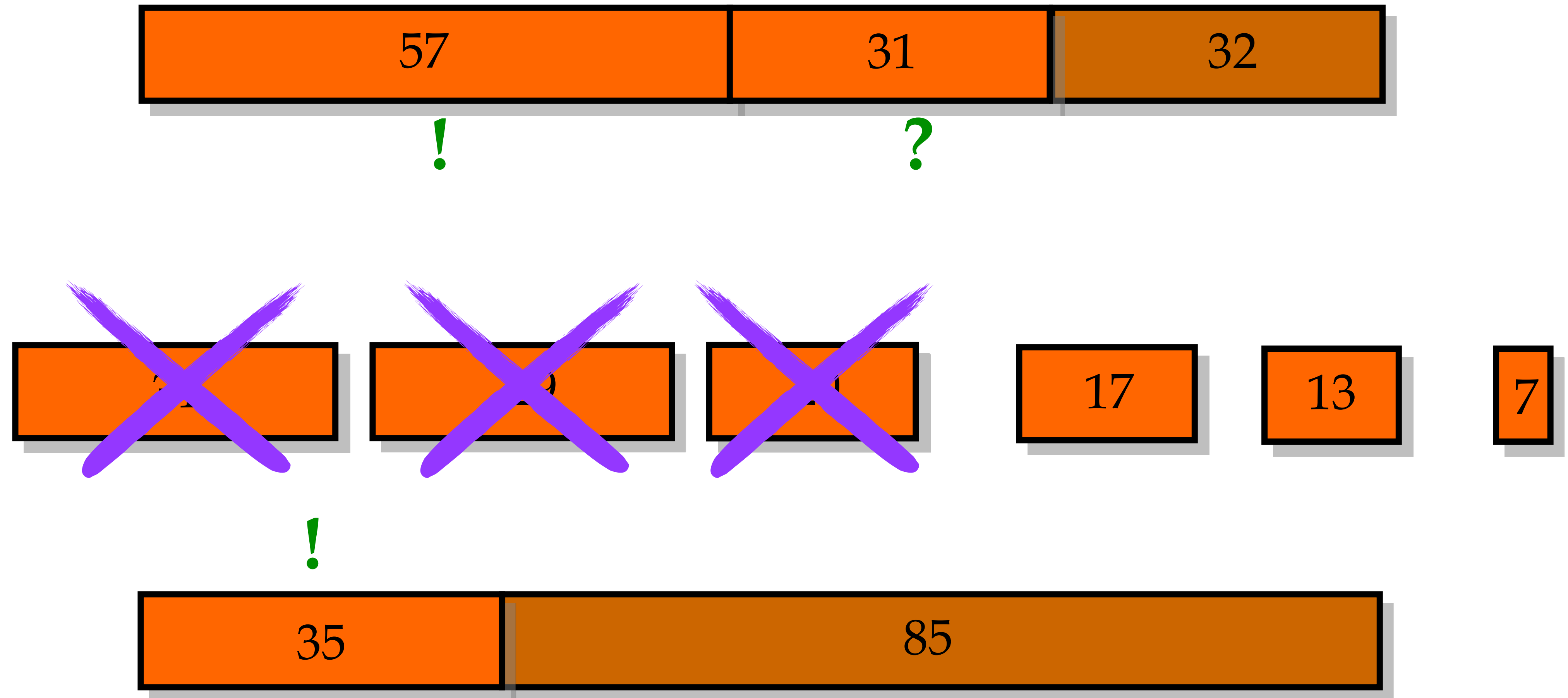
Keine Lösung?!



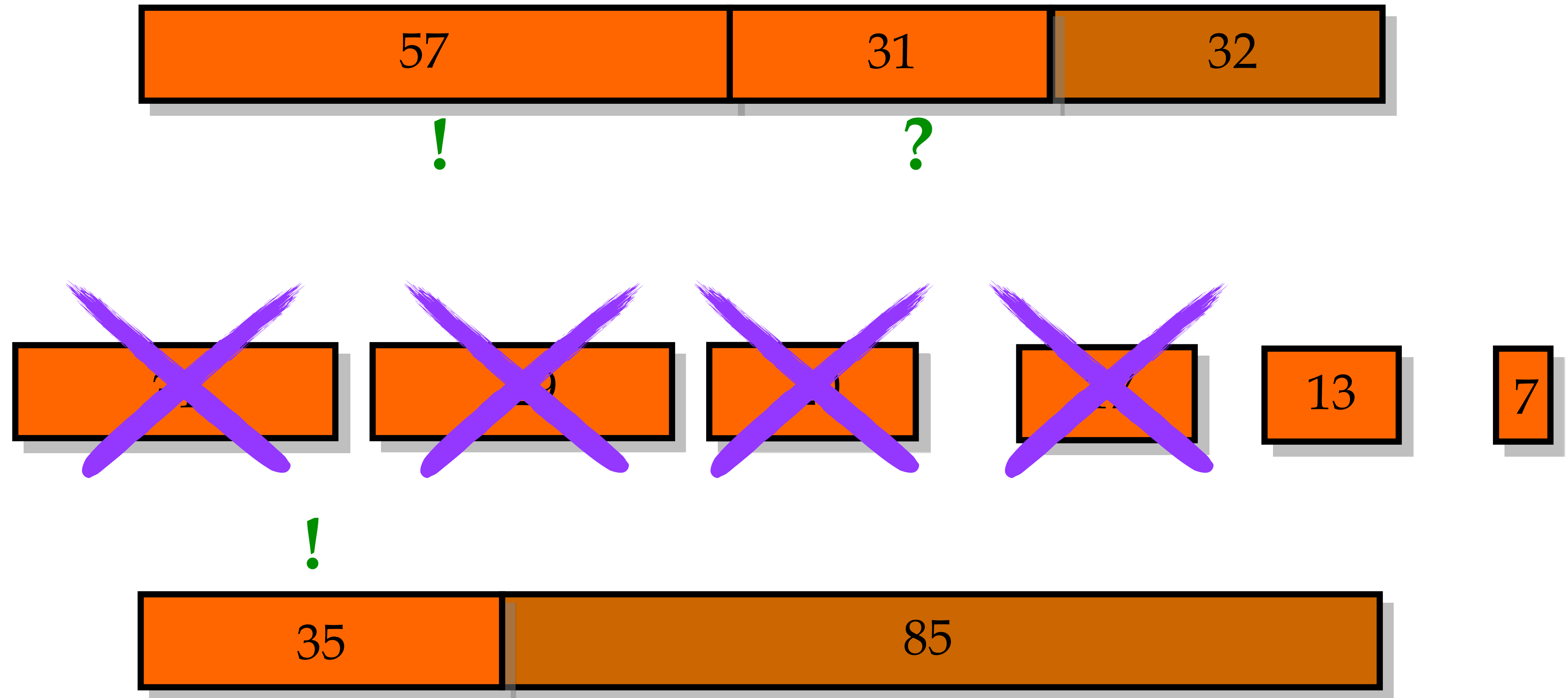
Keine Lösung?!



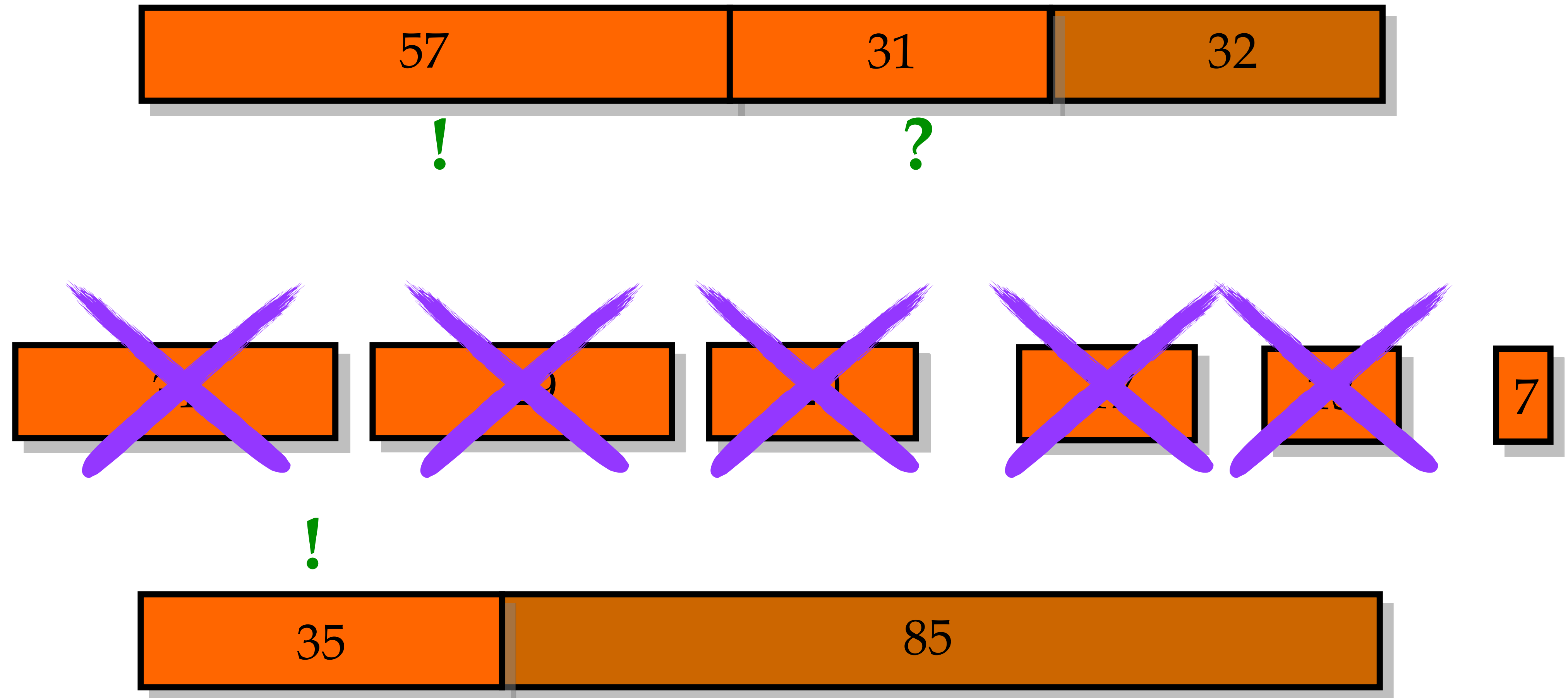
Keine Lösung?!



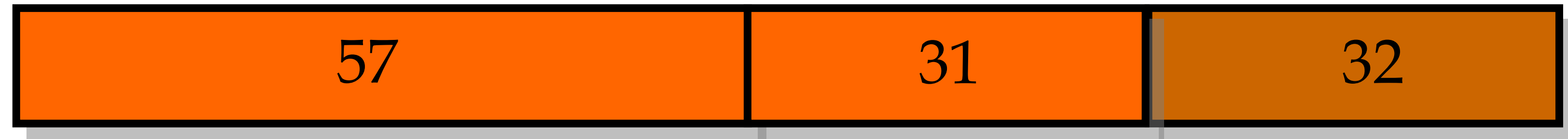
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!

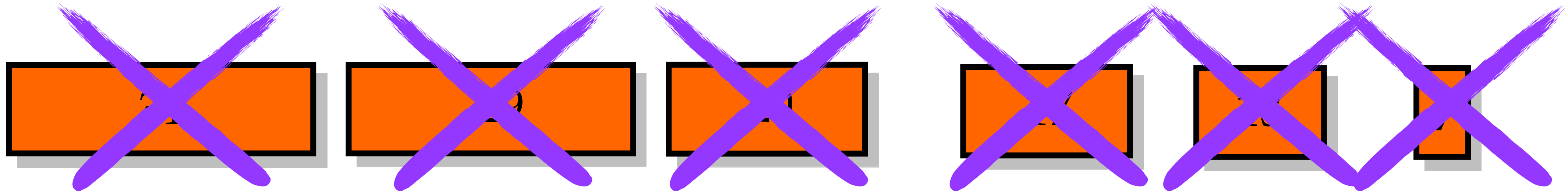


Keine Lösung?!



!

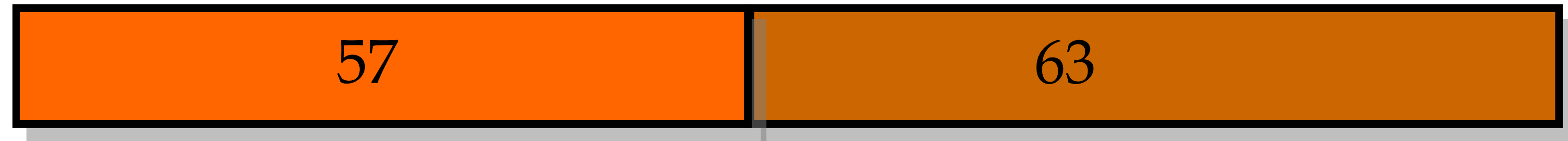
?



!



Keine Lösung?!



!



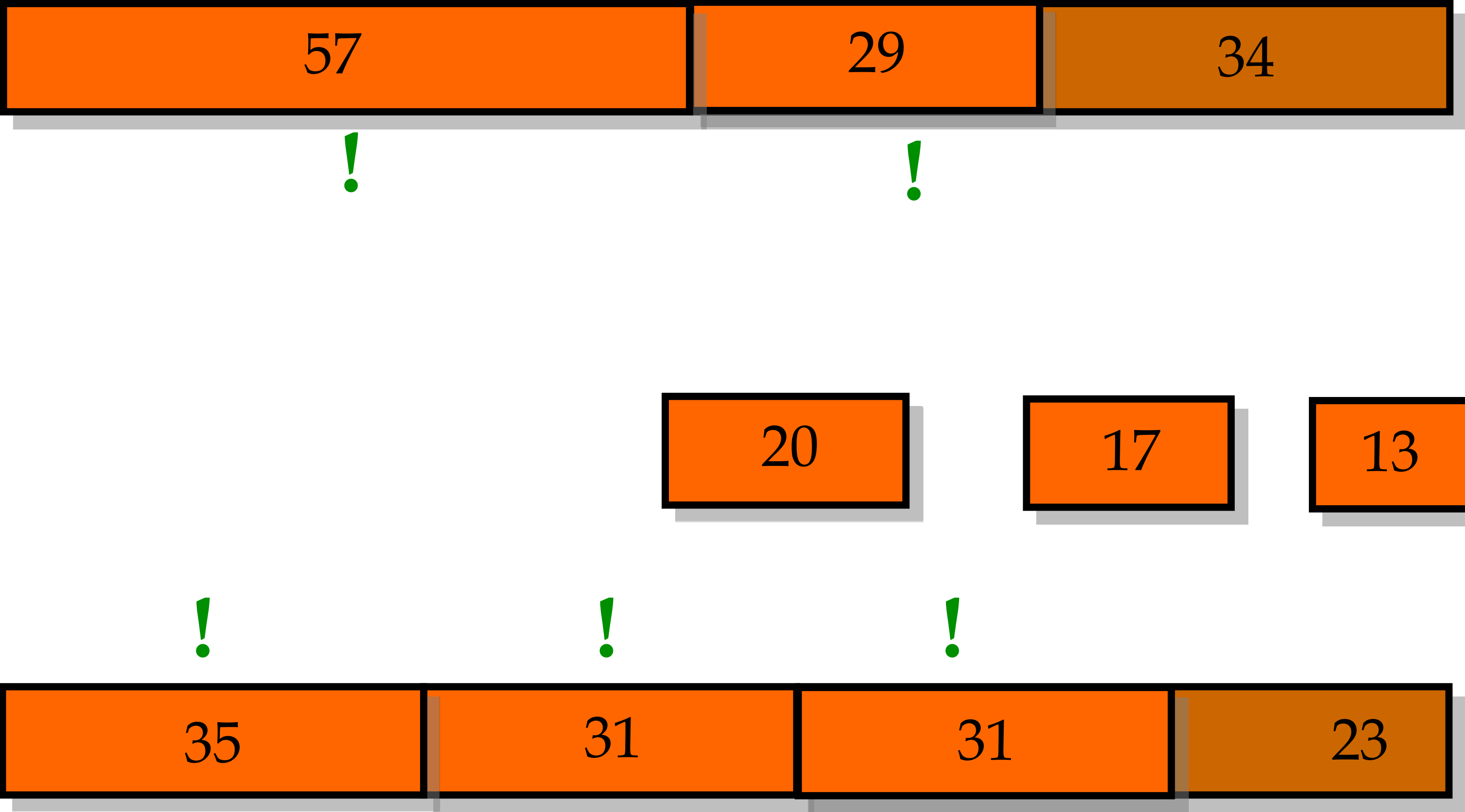
!

!

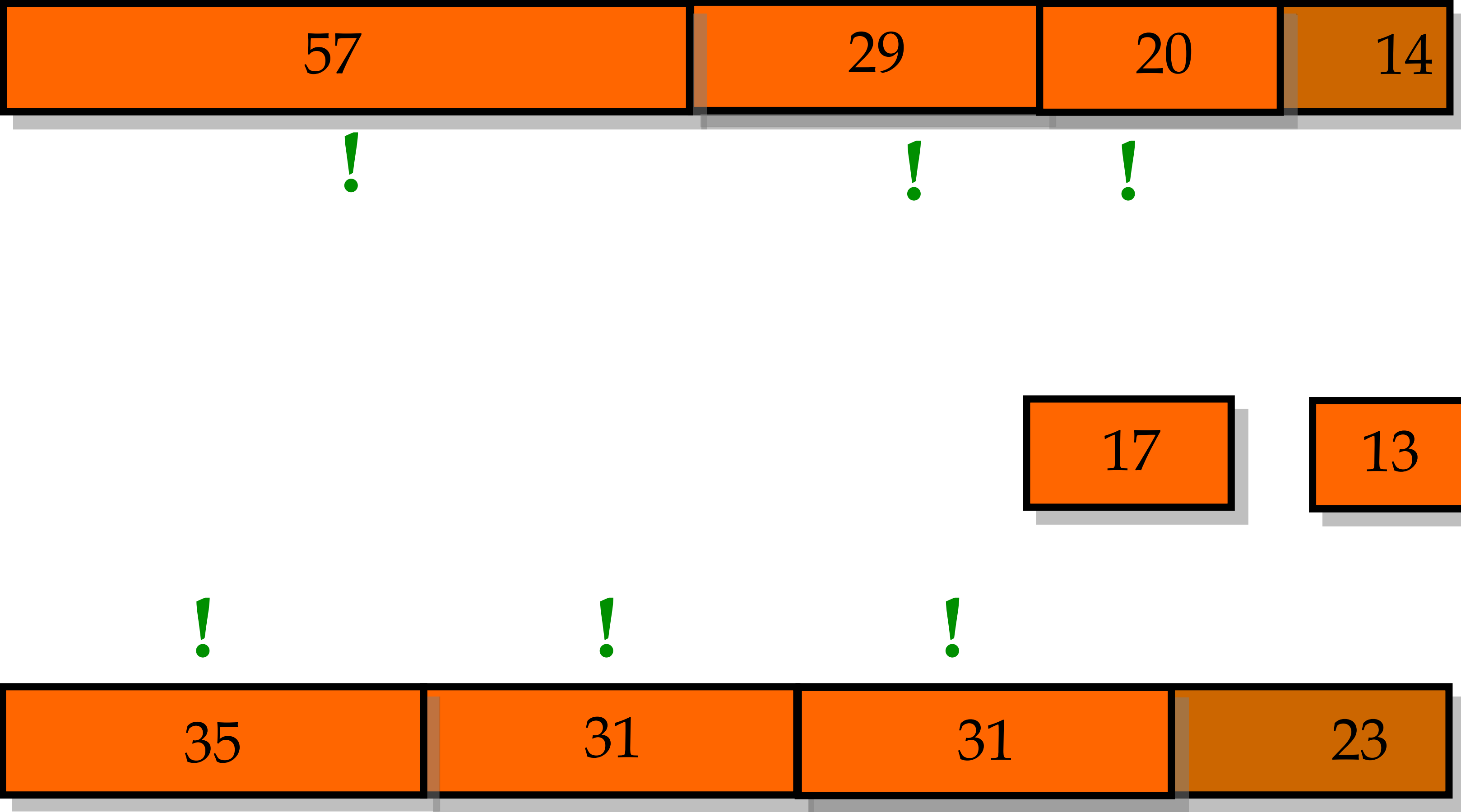
!



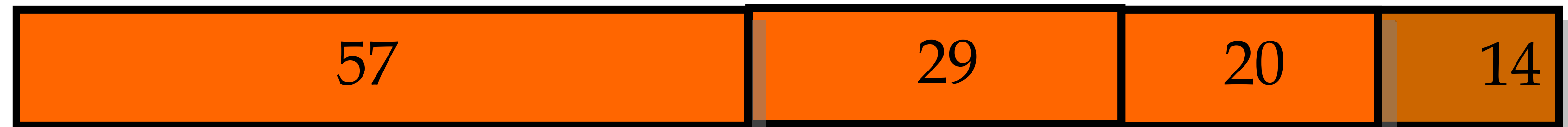
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



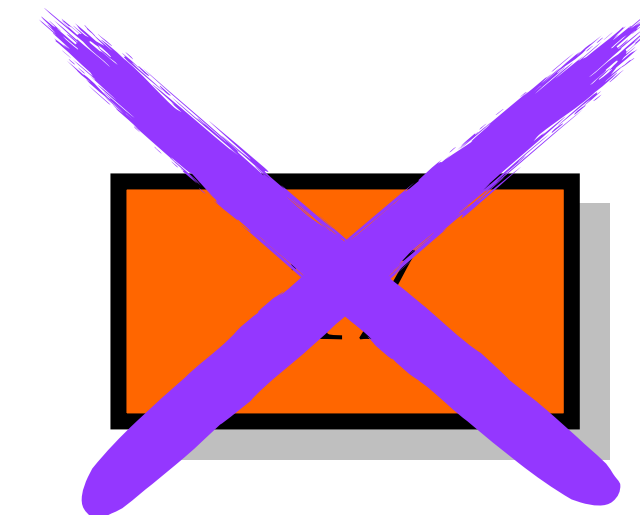
Keine Lösung?!



!

!

!



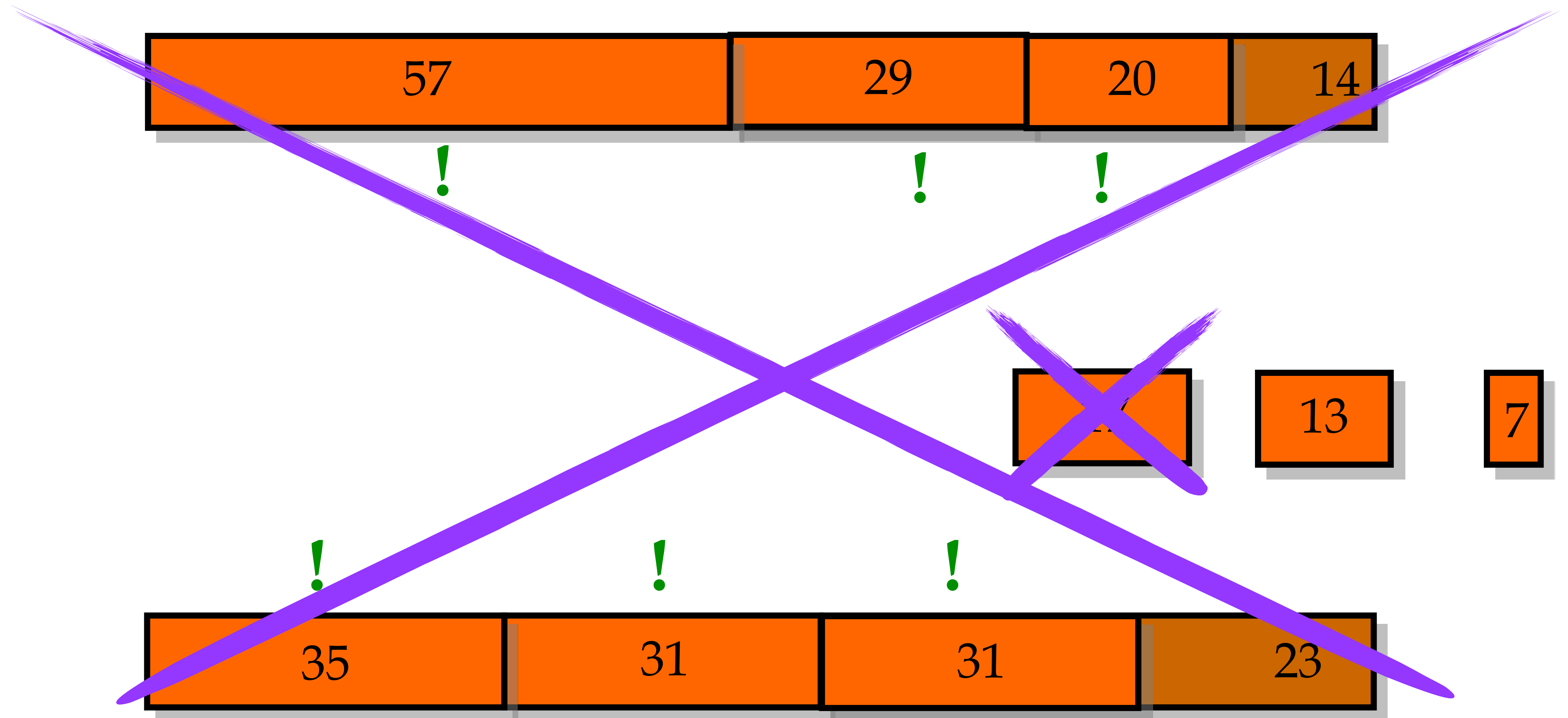
!

!

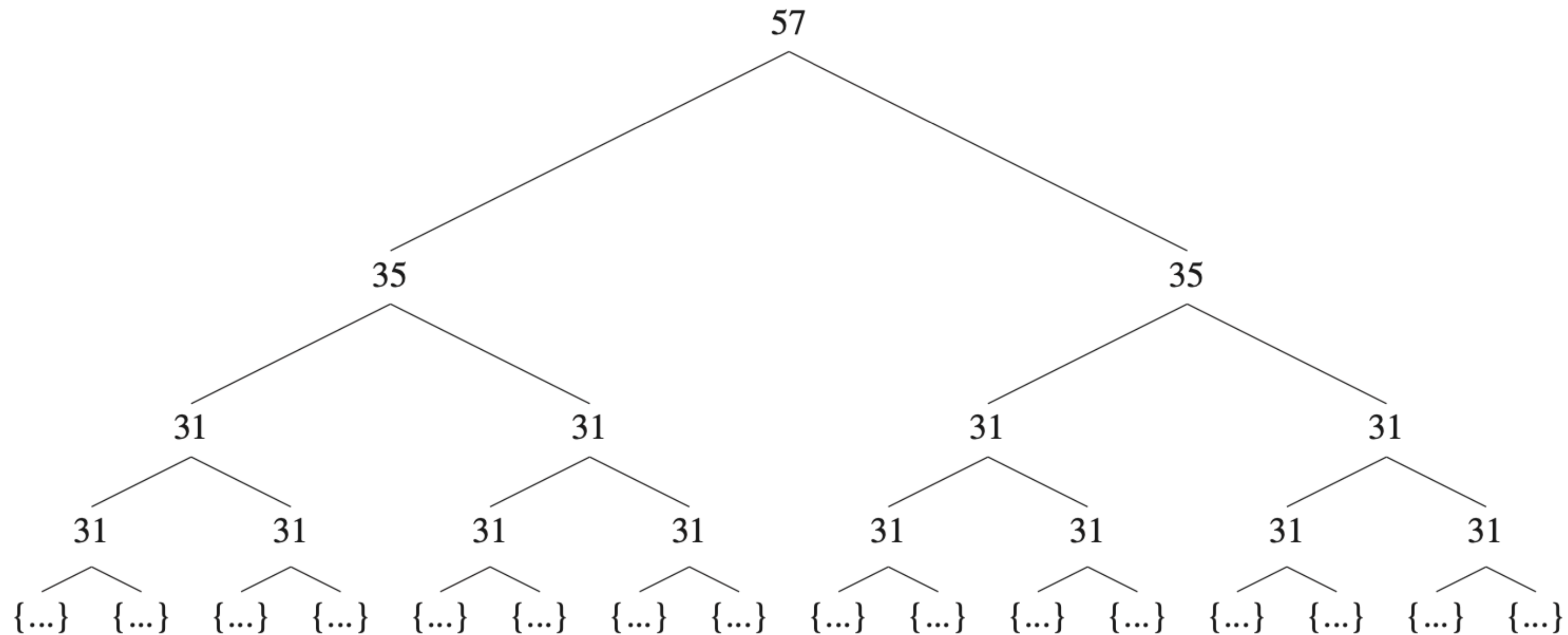
!



Keine Lösung?!



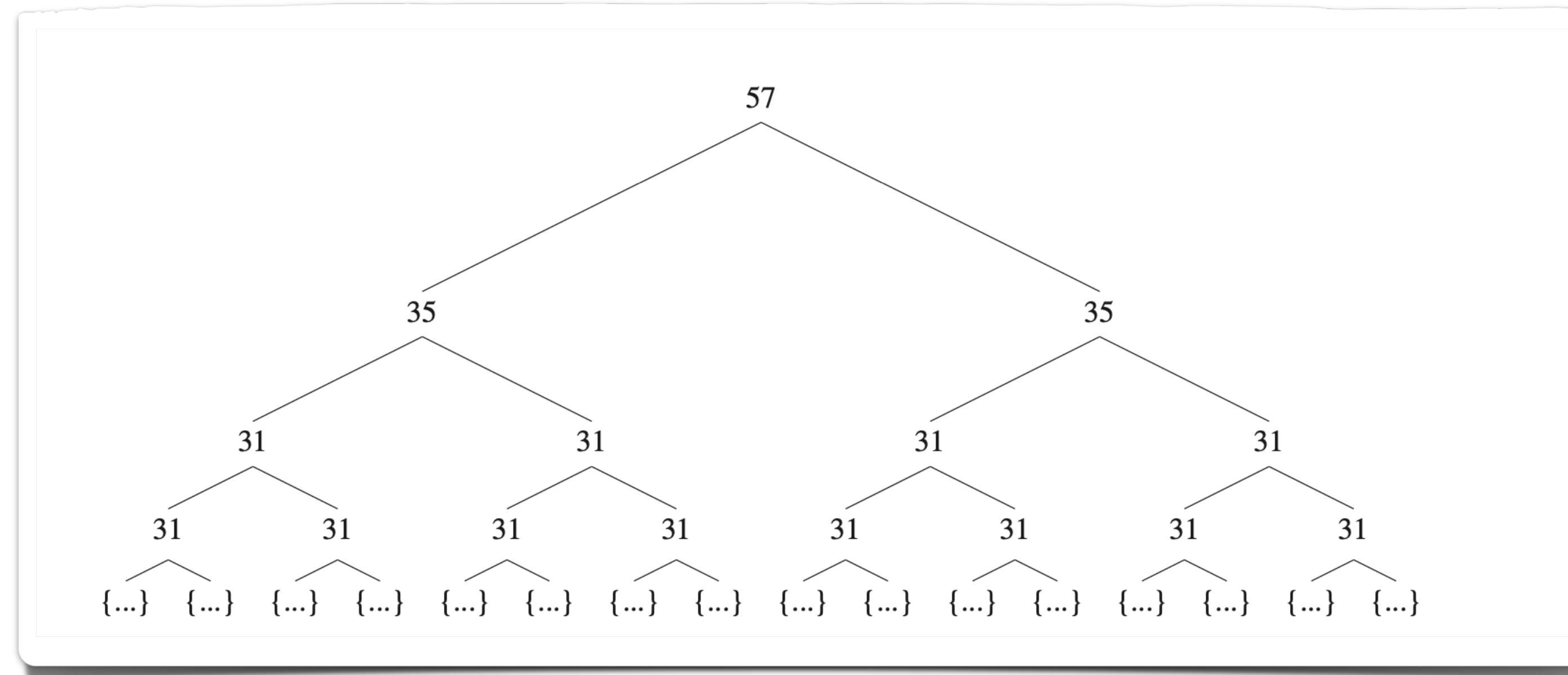
Enumerationsprinzip



120

120

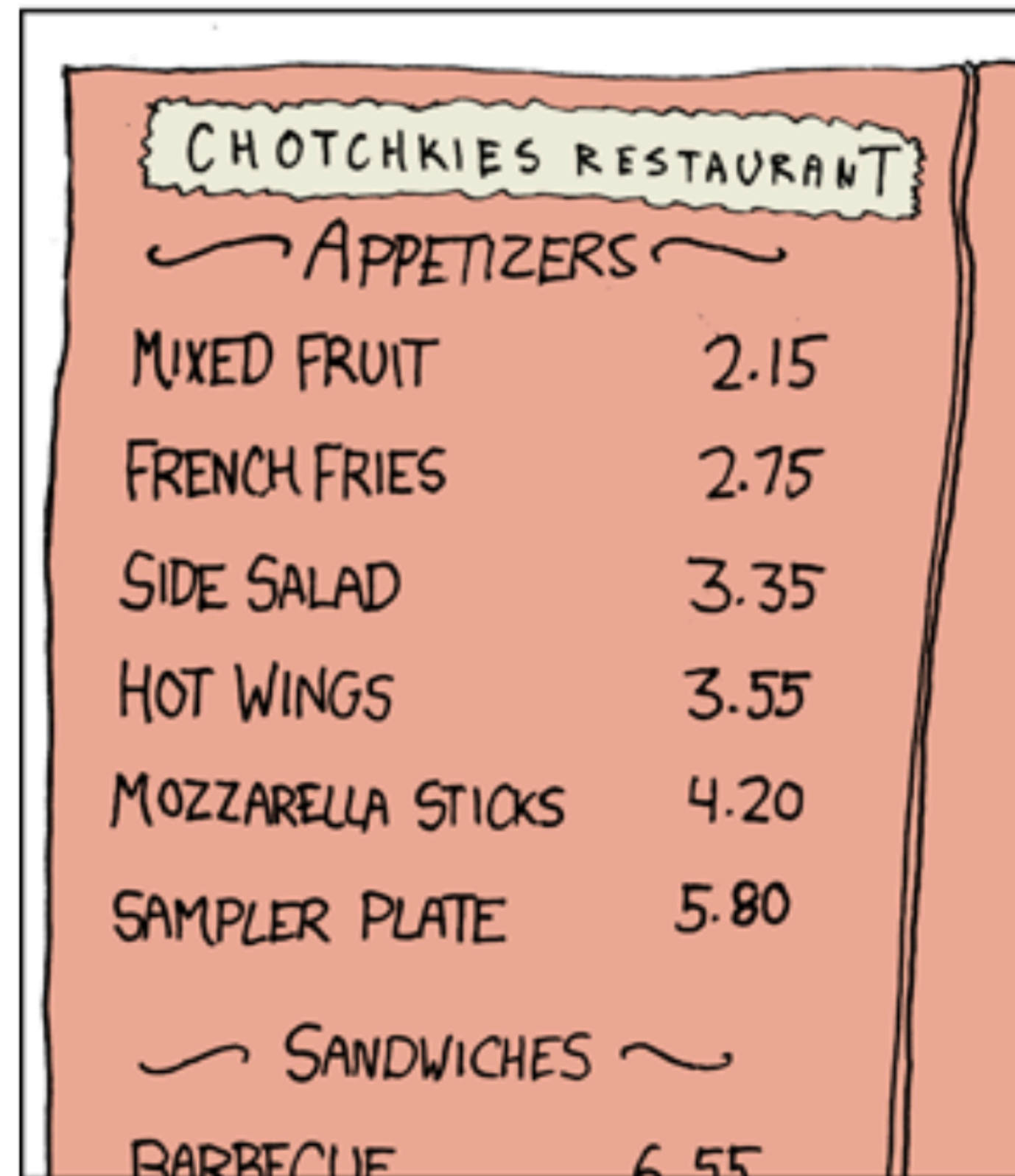
Enumerationsprinzip



- Exponentiell viele Fälle!
- Wie geht das systematisch?
- Wo kann man Arbeit sparen?

Alltagsanwendung: xkcd #287

MY HOBBY:
EMBEDDING NP-COMPLETE PROBLEMS IN RESTAURANT ORDERS



CHOTCHKIES RESTAURANT	
~ APPETIZERS ~	
MIXED FRUIT	2.15
FRENCH FRIES	2.75
SIDE SALAD	3.35
HOT WINGS	3.55
MOZZARELLA STICKS	4.20
SAMPLER PLATE	5.80
~ SANDWICHES ~	
BARBECUE	6.55



Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de