

Präsenzblatt 1

Dieses Blatt dient lediglich der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben und ihrer Lösungen erfolgt in den kleinen Übungen in der Woche vom 27.04.2026.

Präsenzaufgabe 1 (Klausursituation):

Gegeben sei die folgende Klausursituation: Es verbleiben 96 Minuten und es werden noch 57 Punkte benötigt. Erreichbare Punkte pro Aufgabe können der folgenden Tabelle entnommen werden. Teilpunkte werden nicht vergeben.

Aufgabe	1				2			3					4			5	
	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b
Zeit	9	15	16	10	12	10	30	13	17	20	10	16	15	9	6	11	1
Punkte	10	9	6	4	4	4	10	6	8	7	8	5	6	3	2	4	4

- Betrachte diese Instanz als 0-1-KNAPSACK-Instanz: Was entspricht der Kapazität, was dem Mindestwert? Was entspricht dem Gewicht und dem Wert der Objekte?
- Entscheide, ob die Klausur noch bestanden werden kann!
- Kann die Klausur immer noch bestanden werden, wenn 58 Punkte benötigt werden?
- Angenommen, Aufgabe 2b wird modifiziert und benötigt 11 Minuten für 5 Punkte. Wie kann man zeigen, dass dann die Klausur nicht mehr bestanden werden kann, wenn innerhalb von 96 Minuten 58 Punkte erreicht werden müssen?
(Hinweis: Der abgerundete Wert der fraktionalen Lösung ist 58.)

Präsenzaufgabe 2 (Greedy):

Der Greedy-Algorithmus liefert nicht immer eine optimale Lösung, wenn Objekte nur ganz oder gar nicht in den Rucksack aufgenommen werden können (siehe Algorithmus 1 für einen ganzzahligen Greedy-Algorithmus).

```

1: function GREEDY0( $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$ )
2:   Sortiere Objekte nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend; dies ergibt Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .
3:   for  $j$  from 1 to  $n$  do
4:     if  $\left( \sum_{i=1}^{j-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} + z_{\pi(j)} \leq Z \right)$  then
5:        $x_{\pi(j)} := 1$ 
6:     else
7:        $x_{\pi(j)} := 0$ 

```

Algorithmus 1: GREEDY₀ betrachtet jedes Element in der sortierten Reihenfolge π und packt dieses ein, sofern es passt.

Wir nehmen nun an, dass z_i und p_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ganzzahlig sind. Gib Instanzen I_1 und I_2 (mit mindestens 3 Objekten) an, sodass:

- a) für I_1 die Greedy-Lösung **nicht** optimal ist.
- b) für I_2 die Greedy-Lösung optimal ist.

Betrachte zusätzlich die fraktionale Variante. Sei P_F der größtmögliche Wert einer fraktionalen Lösung, P_{OPT} der größtmögliche Wert einer ganzzahligen Lösung, und P_G der Wert aus dem Greedy Algorithmus. Gib jeweils eine Instanz I_3 und I_4 an, sodass:

- c) für I_3 die Ungleichung $P_G < P_{\text{OPT}} < \lfloor P_F \rfloor$ gilt.
- d) für I_4 die Ungleichung $P_G < P_{\text{OPT}} = \lfloor P_F \rfloor$ gilt.

Wir haben nun konkrete Instanzen gefunden, die bestimmte Eigenschaften haben. Diese wollen wir nun generalisieren.

- e) Zeige, für die vorherigen Teilaufgaben, dass es Instanzen mit beliebig vielen Elementen n gibt, die die Eigenschaften a) bis d) erfüllen.