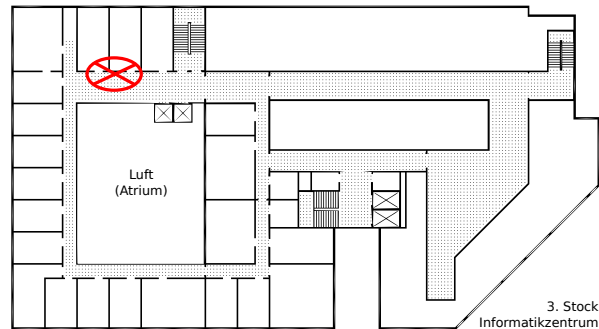


Hausaufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 26.06.2026 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.

Bitte Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Mehrere Blätter tackern!



Hausaufgabe 1 (Greedy_k):

(7 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus GREEDY_k aus der Vorlesung. Wende GREEDY_k auf die folgende Instanz an und gib die beste gefundene Lösung an.

i	1	2	3	4
z_i	9	5	6	7
p_i	12	6	7	8

mit $Z = 18$ und $k = 2$

Gib dazu für jede betrachtete fixierte Teilmenge $\bar{S}$ der Objekte die folgenden Mengen bzw. Werte in einer Tabelle an.

- $\bar{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.

Falls die in $\bar{S}$ ausgewählten Elemente die Restkapazität überschreiten, trage hier jeweils anstelle des Wertes ein $\times$ ein.

- G_k : Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S : Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Betrachte (analog zum Beispiel aus der großen Übung) fixierte Mengen $\bar{S}$ mit weniger Elementen *vor* Mengen mit mehr Elementen. Für zwei fixierte Mengen der gleichen Größe M_1, M_2 betrachte M_1 vor M_2 , falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$ (lexikografische Sortierung).

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X , die nicht in Y vorkommen. Wir betrachten also $M_1 = \{1, 2\}$ vor $M_2 = \{1, 3\}$, weil das kleinste Element von $M_1 \setminus M_2 = \{2\}$ kleiner ist als das kleinste Element von $M_2 \setminus M_1 = \{3\}$.)

Hausaufgabe 2 (3-Satisfiability):**(4+1 Punkte)**

Betrachte das Problem 3-SAT aus der Vorlesung und die folgende Instanz.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

- a) Transformiere die 3-SAT-Instanz in eine Instanz von 0-1-KNAPSACK, indem du die Reduktion aus der Vorlesung nutzt. (Hinweis: Einen Pseudocode für diese Reduktion gibt es im Skript.)
- b) Gib eine Belegung für die Variablen $x_1, \dots, x_4$ an, die die gegebene Instanz erfüllt.

Hausaufgabe 3 (Approximation mit GREEDY₀):**(1+2+1+1+3 Punkte)**

Wir betrachten den Algorithmus GREEDY₀ für Instanzen mit folgenden Eigenschaften:

- (A) jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- (B) die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

Sei das $(k+1)$ -ste Objekt das erste Objekt, welches GREEDY₀ nicht aufnimmt und sei OPT der optimale Lösungswert.

- a) Zeige: $\sum_{i=1}^k z_i > \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot Z$
- b) Zeige: $(\alpha-1)p_{k+1} \leq \sum_{i=1}^k p_i$
(Hinweis: Nutze a))
- c) Zeige: $\sum_{i=1}^k p_i \leq \text{OPT}$
- d) Zeige: $\text{OPT} \leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i$
- e) Zeige: GREEDY₀ liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (A) und (B) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$ -Approximation. (Hinweis: Nutze b), c) und d).)