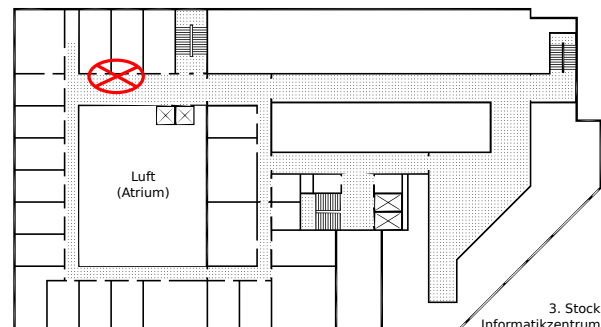


Hausaufgabenblatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 08.05.2026 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.

Bitte Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer auf die Abgabe schreiben. Mehrere Blätter tackern!



Hausaufgabe 1 (FRACTIONAL KNAPSACK):

(4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir FRACTIONAL KNAPSACK.

- a) Sei $Z = 25$, und seien die sechs Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5	6
z_i	10	6	7	3	3	5
p_i	5	5	7	2	1	6

Wende den Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK aus der Vorlesung auf diese Instanz an. Gib in jeder Iteration den aktuellen Gegenstand, den Anteil x_i , zu dem er gepackt wird, sowie den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an.

Hausaufgabe 2 (Fractional Knapsack mit mehrfachem Packen):

(1+5 Punkte)

Angenommen, in FRACTIONAL KNAPSACK steht jedes Objekt beliebig oft zur Verfügung, d.h., für n Objekte $(z_1, p_1), \dots, (z_n, p_n)$ sind nicht-negative Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass $\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq Z$ und $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ maximal.

- Gib die optimale Lösung dieser Problemvariante für die Instanz aus Aufgabenteil a) an.
- Gib einen Algorithmus an, der das Problem optimal in Zeit $O(n)$ löst (d.h. insbesondere, dass er ohne Sortieren auskommt). Begründe außerdem kurz die Korrektheit und die Laufzeit Deines Algorithmus.

Hausaufgabe 3 (MAXIMUM KNAPSACK):**(5+5 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir MAXIMUM KNAPSACK, also das Problem, bei dem wir jedes gegebene Objekt nur ganz oder gar nicht nehmen können. Um dieses Problem zu lösen, wandeln wir den Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK aus der Vorlesung folgendermaßen ab: Wir sortieren die Objekte aufsteigend nach $\frac{z_i}{p_i}$. Dann gehen wir die Objekte der Sortierung entsprechend durch und packen ein Objekt in den Rucksack, falls es hineinpasst. Eine formale Beschreibung ist in Algorithmus 1 zu sehen. Wir nennen diesen Algorithmus GREEDY₀.

```
1: function GREEDY0( $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$ )
2:   Sortiere Objekte nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend; dies ergibt Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .
3:   for  $j := 1$  to  $n$  do
4:     if  $\left( \sum_{i=1}^{j-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} + z_{\pi(j)} \leq Z \right)$  then
5:        $x_{\pi(j)} := 1$ 
6:     else
7:        $x_{\pi(j)} := 0$ 
8:   return  $x_1, \dots, x_n$ 
```

Algorithmus 1: GREEDY₀

- a) Sei $Z = 20$, und seien die fünf Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5
z_i	10	4	10	3	3
p_i	6	2	10	1	2

Wende GREEDY₀ auf diese Instanz an. Entscheide in jeder Iteration, ob der aktuelle Gegenstand gepackt wird und gib den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an. Ist die erhaltene Lösung optimal? Begründe Deine Antwort!

- b) Zeige: Die ganzzahlige Lösung P_G von GREEDY₀ kann beliebig weit von einer optimalen Lösung P_{OPT} (für das ganzzahlige MAXIMUM KNAPSACK-Problem) entfernt sein. Mit anderen Worten: Zeige, dass es für jedes $c \in (0, 1]$ eine Instanz mit $0 < \frac{P_G}{P_{OPT}} < c$ gibt.
(Hinweis: Es gibt geeignete Instanzen mit sehr kleinem n . Gib Instanzen an, die diese Eigenschaft unabhängig von der Sortierung von Elementen mit derselben Dichte haben.)