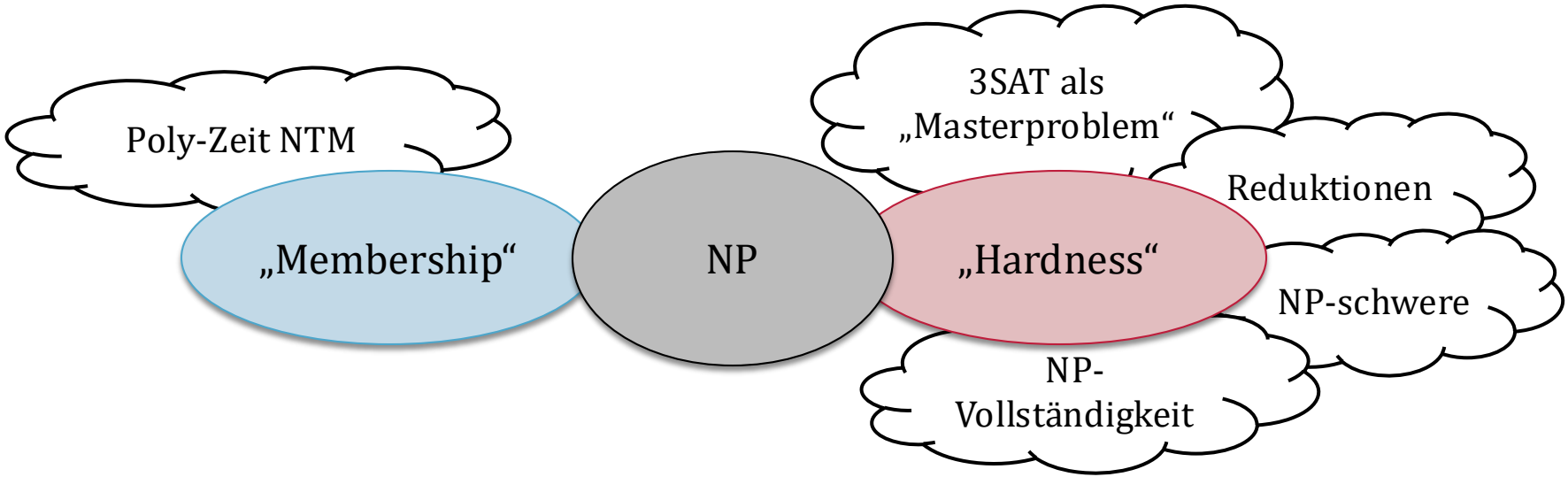
Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Letztes Mal


Poly-Zeit NTM
„Membership“
NP
3SAT als
„Masterproblem“
Reduktionen
„Hardness“
NP-schwere
NP-
Vollständigkeit

Idee NTM-Konstruktion

Bisher gesehen:
Rate eine Lösung und
überprüfe diese

Klappt das immer für
Probleme aus NP?

Können wir NP-
Probleme mit solchen
„Zertifikaten“ lösen?

Kapitel 11.3 – Zertifikate

Zertifikate

Definition 11.17
Ein **Verifizierer** ist eine deterministische, totale TM $\mathcal{V}$ mit zwei Eingabebändern: einem über Σ und einem Zertifikatsband über $\{0,1\}$.

$x \in \Sigma^*$ ist in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$, wenn es ein **Zertifikat** $y \in \{0,1\}^*$ gibt, sodass $\mathcal{V}$ die Eingabe (x, y) akzeptiert.

$\mathcal{V}$ ist ein **Polynomialzeit-Verfizierer**, wenn dieser auf (x, y) in $O\left((|x| + |y|)^k\right)$ Schritten hält und $|y| \leq |x|^c$ mit $k, c \in \mathbb{N}$.

Theorem 11.18
Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist genau dann in NP, wenn es einen Polynomialzeit-Verifizierer $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \mathcal{L}$ gibt.

Beweisskizze

Theorem 11.18
Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist genau dann in NP, wenn es einen Polynomialzeit-Verifizierer $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \mathcal{L}$ gibt.

„⇒“:
Für eine gegebene NTM M, die $\mathcal{L}$ in Zeit $O(n^k)$ entscheidet, konstruiere einen Polynomialzeit-Verifizierer $\mathcal{V}$.
Dieser erwartet ein Zertifikat der Länge n^k.
$\mathcal{V}$ verhält sich wie M, eliminiert über das Zertifikat aber den Nicht-Determinismus.

„⇐“:
Für einen gegebenen Polynomialzeit-Verifizierer $\mathcal{V}$, dessen Zertifikate Länge $\leq n^k$ besitzen, konstruiere eine NTM M.
M rät ein binäres Zertifikat und verhält sich dann wie $\mathcal{V}$.

Beispiel 11.19: SAT

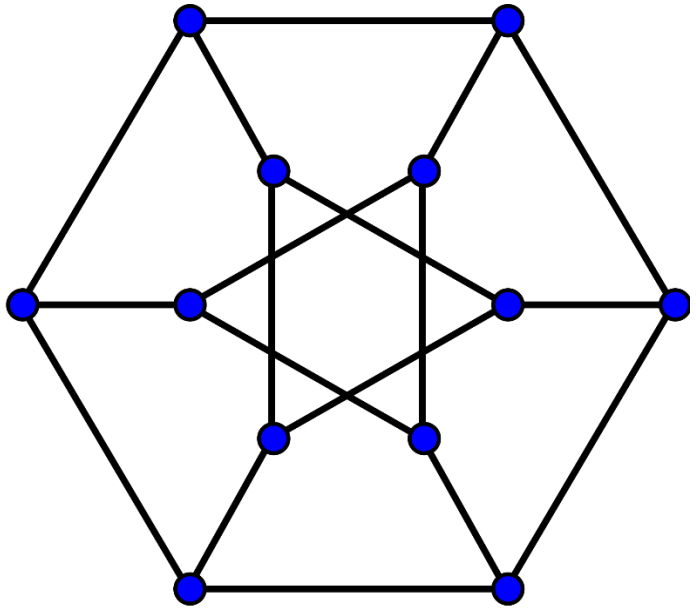
$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

Wie sieht ein Verifizierer aus?

- Zertifikate haben Länge n, bspw. 0110
- Jede Variable x_i hat damit den Wert an Stelle i des Zertifikats.
- Überprüfe in jeder Klausel, ob ein erfüllendes Literal existiert.

Beispiel 11.20: Independent Set

Problem Independent Set
Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage: Existiert $I \subseteq V$ mit $|I| = k$ und für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt $u \notin I$ oder $v \notin I$?



Hat der Graph ein Independent Set der Größe 4?

Hat der Graph ein Independent Set der Größe 5?

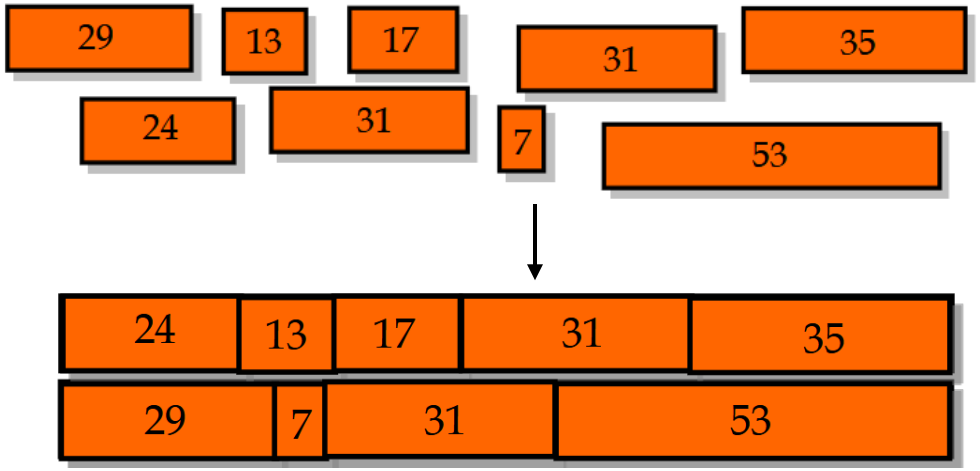
Wie sieht ein Zertifikat aus?
Wie überprüfe ich dies?

Beispiel 11.21: Subset Sum

Problem Subset Sum
Gegeben: Menge von Zahlen $N = \{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ und eine Zahl $S \in \mathbb{N}$
Frage: Existiert $N' \subseteq N$, sodass $\sum_{n \in N'} n = S$?

Ist diese Instanz mit $S = 120$ lösbar?

Wie sieht ein Zertifikat aus?
Wie überprüfe ich dies?



Beispiel 11.22: Factorization

Problem Factorization
Gegeben: Zwei Zahlen $n, b \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Zahl m mit $1 < m \leq b$, die n teilt?

Ist diese Instanz eine Ja-Instanz? $n = 15239, b = 10$

Wie sieht ein Zertifikat aus?
Wie überprüfe ich dies?

Zertifikat ist eine Zahl m mit $1 < m \leq b$.
Die Berechnung n mod m kann in Polyzeit berechnet werden.

Beispiel 11.22: $\overline{\text{Factorization}}$

Problem $\overline{\text{Factorization}}$
Gegeben: Zwei Zahlen $n, b \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es keine Zahl m mit $1 < m \leq b$, die n teilt?

Ist diese Instanz eine Ja-Instanz?

$n = 15349, b = 124$

Wie sieht ein Zertifikat aus?
Wie überprüfe ich dies?

Das wirkt deutlich schwieriger!

Beispiel 11.22: $\overline{\text{Factorization}}$

Problem $\overline{\text{Factorization}}$
Gegeben: Zwei Zahlen $n, b \in \mathbb{N}$
Frage: Gibt es keine Zahl m mit $1 < m \leq b$, die n teilt?

Zunächst:
Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{k_\ell} = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{k_i}$$

Man kann zeigen:

- Für jede Primfaktorzerlegung kann ein polynomiell großes Zertifikat definiert werden.
- Die Überprüfung des Zertifikats kann in polynomieller Zeit geschehen:
  - Prüfe jeden Faktor, ob dieser eine Primzahl ist
  - Prüfe, ob $\prod_{i=1}^{\ell} p_i^{k_i} = n$
  - Prüfe, ob der kleinste Faktor $> b$ ist.

Überlegungen

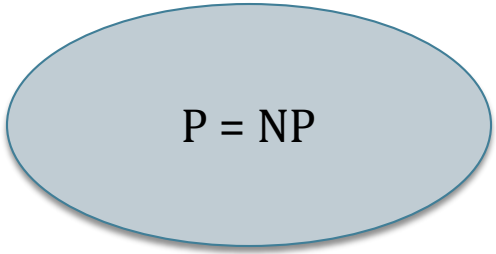
Factorization liegt damit in NP ∩ coNP

Man vermutet

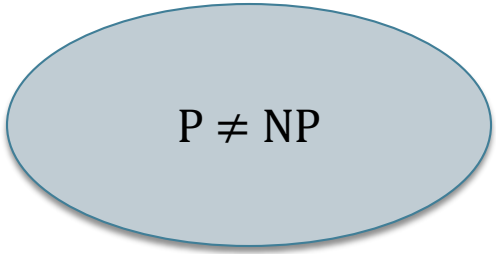
- NP ≠ coNP
  - andernfalls würde die polynomielle Hierarchie zusammenfallen
  - Damit: Factorization ist nicht (co-)NP-schwer
- Factorization ∉ P

→ Factorization ∈ NP \ P

P vs NP



Viele Optimierungsprobleme in der Praxis ließen sich „effizient“ lösen!
(Aber mit welcher Laufzeit?!)



Verschlüsselungsverfahren bleiben sicher.
Sie basieren oft auf Primfaktorzerlegungen.

Wichtig:
P ≠ NP sagt nur aus, dass nicht alle Instanzen eines Problems effizient gelöst werden können!

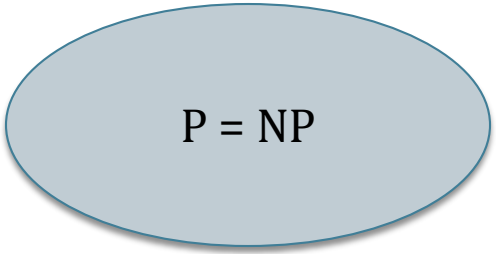
Was tun bei NP-schweren Optimierungsproblemen

Es gibt viele Möglichkeiten, NP-schwere Probleme anzugehen!

Spezialfälle können einfach zu lösen sein.

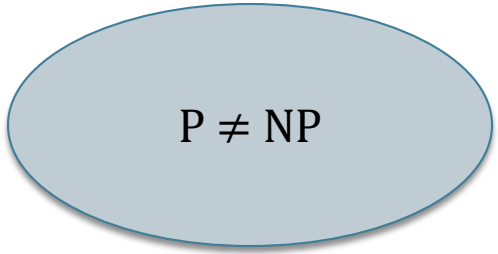
Gute Lösungen (Approximationen) können oft gefunden werden.

Wie zeigt man P =/≠ NP?

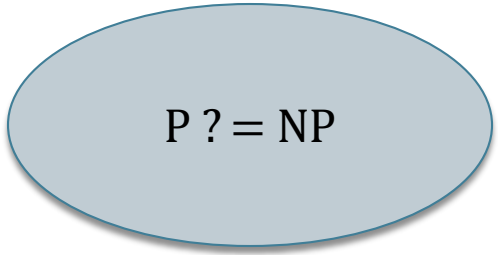


Konstruktiv:
Angabe eines poly-Zeit-Algorithmus für ein NP-vollständiges Problem.

Nicht-konstruktiv:
Formaler Beweis, dass man die Probleme effizient lösen kann, man kennt aber den Algorithmus nicht.

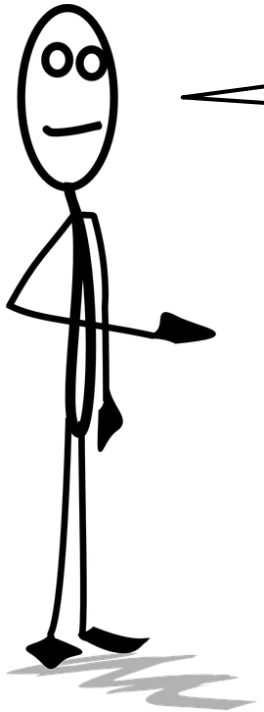


Formaler Beweis



Nicht lösbar.
Zeige logische Unabhängigkeit.
(Beispiel: Kontinuumshypothese)

Was glaubt man?



Man geht davon aus, dass P ≠ NP.

Als kleines Indiz zur Überlegung:
Es gibt tausende Probleme in P und tausende NP-schwere Probleme.

Für keiner dieser über 10^6 Kombinationen wurde eine Reduktion gefunden!

Kapitel 11.4 – coNP-Vollständige Probleme

Liste von coNP-Vollständigen Problemen

Problem UNSAT
Gegeben: Boolesche Formel F in CNF
Frage: Existiert keine F erfüllende Belegung?

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

Problem TAUTOLOGY
Gegeben: Boolesche Formel F
Frage: Erfüllt jede Variablenbelegung F?

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$

Exkurs – P, NP und Geometrie

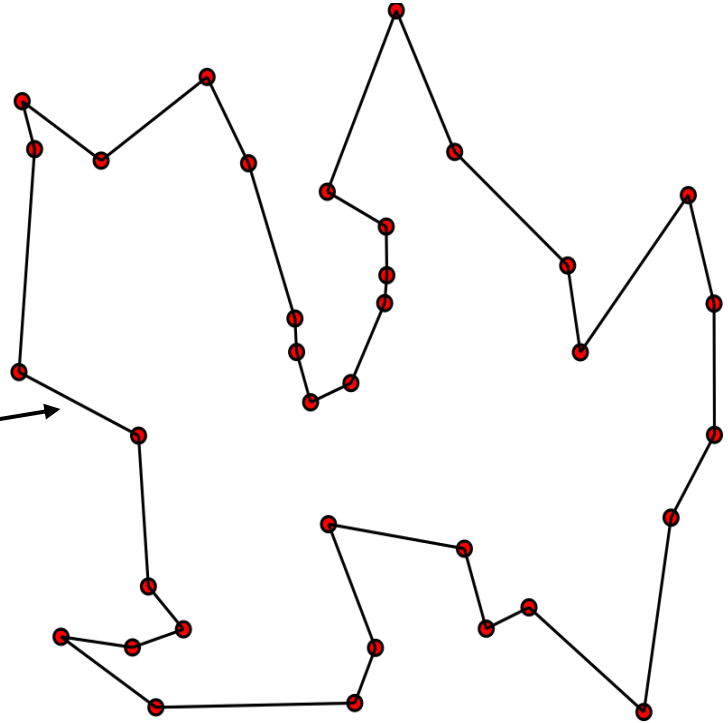
Euklidisches TSP - Definition

Gegeben: Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$
Gesucht: Eine Permutation π, sodass

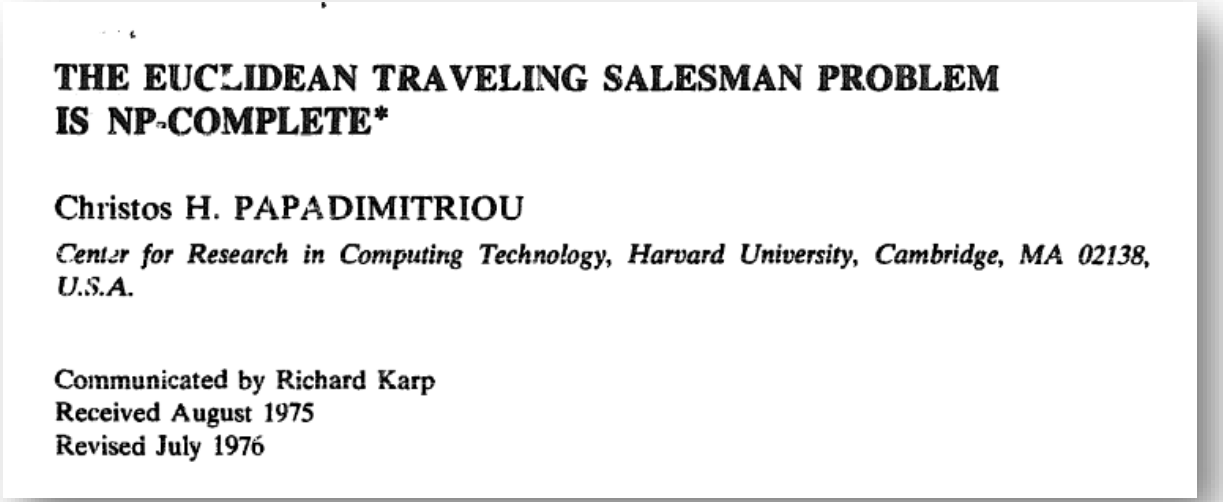
$$\sum_{i=1}^{n} \|p_{\pi(i)} p_{\pi(i+1)}\|$$

mit $\pi(n+1) = \pi(1)$ minimal ist.

Länge der Kante ist die euklidische Distanz



NP-Schwere



THE EUCLIDEAN TRAVELING SALESMAN PROBLEM IS NP-COMPLETE*

Christos H. PAPADIMITRIOU

Center for Research in Computing Technology, Harvard University, Cambridge, MA 02138, U.S.A.

Communicated by Richard Karp
Received August 1975
Revised July 1976

*: Das Entscheidungsproblem (gibt es eine Tour der Länge höchstens k) ist in NP, wenn die Distanzen gerundet werden.

Summe von Quadratwurzeln

Gegeben: n Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage: Ist

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq k?$$

The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 10 (December **1981**)

6369*. *Proposed by Joseph O'Rourke, Johns Hopkins University.*

Let a_i and b_j be positive integers, $i, j = 1, 2$ $(1 \leqslant a_i, b_j \leqslant N)$. Find the minimal positive value of $\Sigma a_i^{1/2} - \Sigma b_j^{1/2}$. Suggest or prove asymptotic results. Consider the corresponding problem with sums of three terms.

Offene Frage: Ist das Problem „Summe von Quadratwurzeln“ in NP?

Problem: Minimal Aufspannender Baum

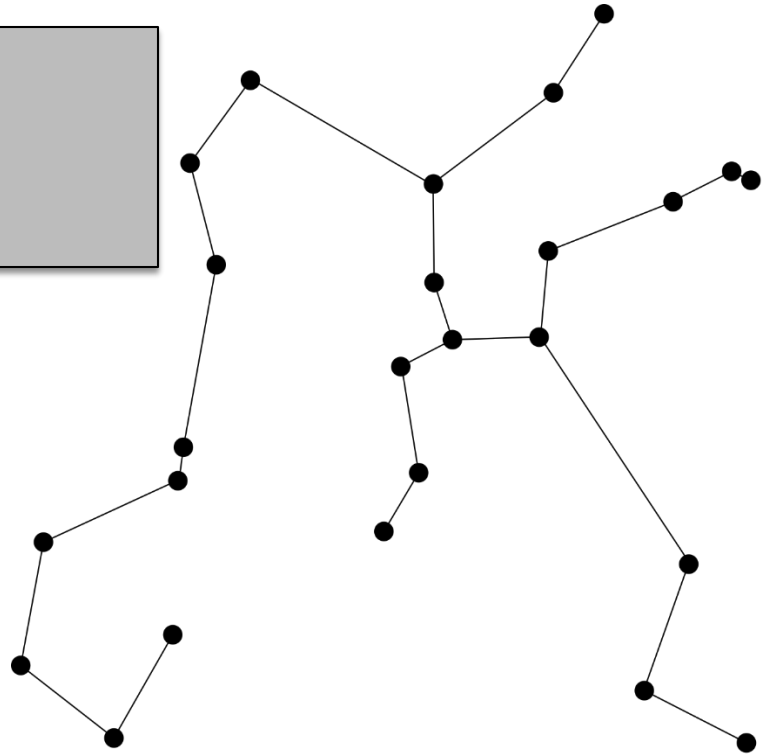
Gegeben: Punkte $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$
Gesucht: Segmente $s_1, \dots, s_{n-1} \in \binom{P}{2}$, sodass

- $\sum_{i=1}^{n-1} \|s_i\|_2$ minimal
- Segmente bilden keinen Kreis

Dieses Problem lässt sich einfach lösen:

- Gehe Segmente der Länge nach durch
- Falls das Hinzufügen des Segments keinen Kreis schließt, füge es hinzu.

Es existiert also ein Polynomialzeitalgorithmus für das Optimierungsproblem.

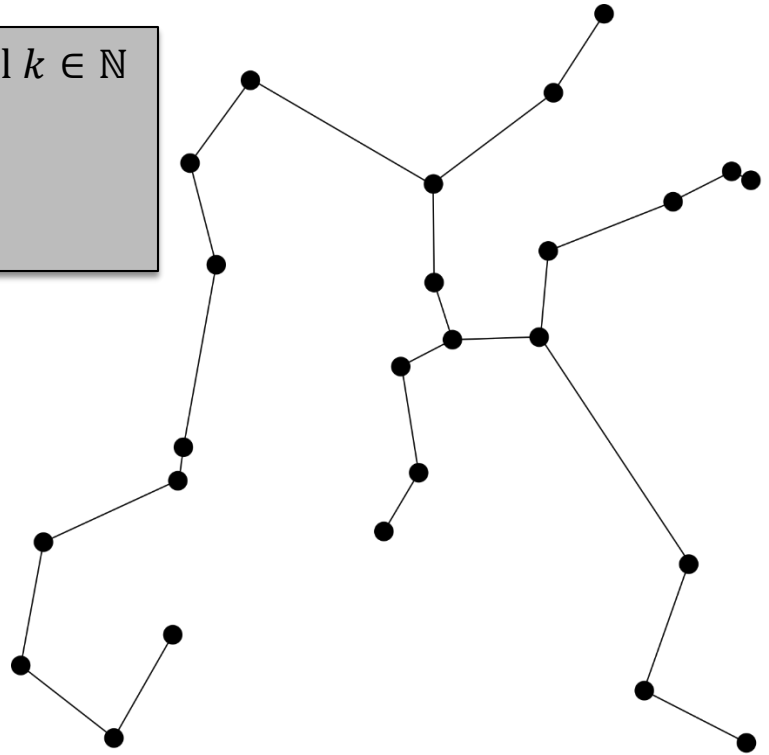


Problem: Minimal Aufspannender Baum

Gegeben: Punkte $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage: Existieren Segmente $s_1, \dots, s_{n-1} \in \binom{P}{2}$, sodass

- $\sum_{i=1}^{n-1} \|s_i\|_2 \leq k$
- Segmente bilden keinen Kreis

Es ist nicht bekannt, ob dieses Entscheidungsproblem in NP liegt.



Nächstes Mal