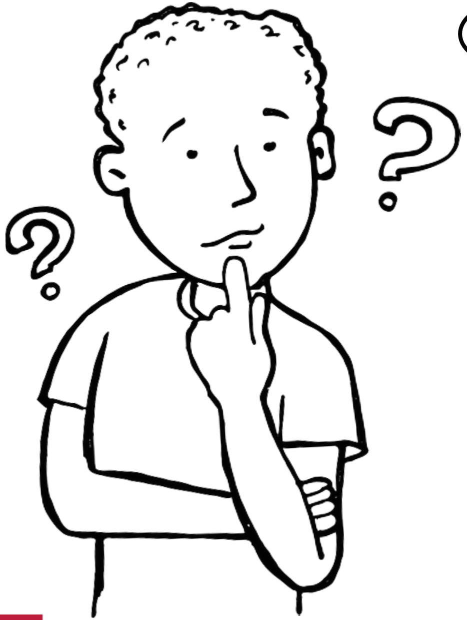
Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Nächstes Kapitel

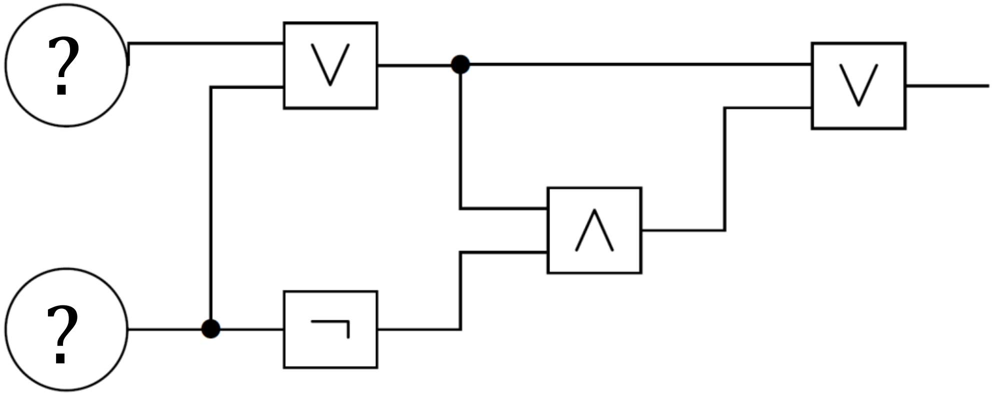


Wie sieht es
mit NP aus?

Gibt es auch hier ein
„Masterproblem“?

Kapitel 11 – Die Klasse NP

Eine „Variante“ des CVP



Wir schwer ist es zu entscheiden, ob man die „?“ so mit 0 und 1 Belegen kann, damit am Ende der Wert 1 herauskommt?

Kapitel 11.1 – NP-Vollständigkeit von SAT

CircuitSAT

CircuitSAT

Definition 11.1
Ein Boolescher Schaltkreis **mit variablen Eingängen** ist ein Boolescher Schaltkreis wie in Definition 10.3, in welchem Zuweisungen der Form $P_i = ?$ erlaubt sind.

P_i, deren Zuweisung der Form $P_i = ?$ entsprechen, werden als Variable Eingänge des Circuits bezeichnet.

Für einen Schaltkreis C mit variablen Eingängen $y_1, \dots, y_k \in \{0,1\}$ schreiben wir $C(y_1, \dots, y_k)$ für den Wahrheitswert von C mit der Belegung $P_1 = y_1, \dots, P_k = y_k$.

<u>Erfüllbarkeitsproblem für Schaltkreise (CircuitSAT)</u>
Gegeben: Ein Boolescher Schaltkreis C mit variablen Eingängen $P_1, \dots, P_k$.
Frage: Gibt es Wahrheitswerte $y_1, \dots, y_k \in \{0,1\}$ mit $C(y_1, \dots, y_k) = 1$?

CircuitSAT ist NP-vollständig

Theorem 11.2
CircuitSAT ist NP-vollständig (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Lemma 11.4 „Membership“
CircuitSAT liegt in NP.

Beweis: Betrachte die Instanz von CircuitSAT als CVP-Instanz, indem eine Belegung $y_1, \dots, y_k$ geraten wird. Das dauert nur $O(k)$ Zeit.

Die resultierende Instanz zu überprüfen, benötigt $O(n^2)$ Zeit für n Zuweisungen, ist also polynomiell.

Gibt es eine erfüllende Belegung, dann kann diese auch geraten werden und wird überprüft.
Gibt es keine erfüllende Belegung, kann die CVP-Instanz immer nur ‚falsch‘ zurückgeben.

CircuitSAT ist NP-vollständig

Theorem 11.2
CircuitSAT ist NP-vollständig (bzgl. Logspace-Reduktionen).

Lemma 11.5 „Hardness“
CircuitSAT ist NP-schwer.

Der Beweis ist sehr ähnlich zum P-schwere-beweis von CVP.

Im Skript sind die Unterschiede hervorgehoben.

SAT

(3)SAT

<u>Erfüllbarkeit von Booleschen Formeln in (k)CNF ((k)SAT)</u>
Gegeben: Eine Boolesche Formel F in CNF (in der jede Klausel maximal k Literale enthält).
Frage: Gibt es eine Belegung φ mit $\varphi(F) = \text{true}$?

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

Theorem 11.6 (Cook 1971, Levin 1973)
SAT ist NP-vollständig.

Theorem 11.8
3SAT ist NP-vollständig.

3SAT ist NP-schwer

Theorem 11.9
CircuitSAT $\leq_m^{log}$ 3SAT.

Beweis(skizze):
Betrachte folgende Funktion $F(.)$, welche jede Zuweisung $P_i = \cdots$ in eine 3-KNF überträgt:

- $P_i = 0$ wird zu $\neg x_i$.
- $P_i = 1$ wird zu x_i.
- $P_i = ?$ wird nicht übersetzt.
- $P_i = \neg P_s$ wird zu $(x_i \vee x_s) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_s)$.
- $P_i = P_s \wedge P_t$ wird zu $(x_i \vee \neg x_s \vee \neg x_t) \wedge (\neg x_i \vee x_s) \wedge (\neg x_i \vee x_t)$.
- $P_i = P_s \vee P_t$ wird zu $(\neg x_i \vee x_s \vee x_t) \wedge (x_i \vee \neg x_s) \wedge (x_i \vee \neg x_t)$.

Dann ist

$$F = x_\ell \wedge \bigwedge_{i=0,\ldots,\ell} F(P_i = \cdots)$$

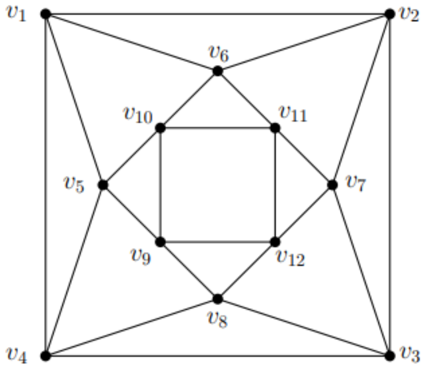
Korrektheitsbeweis zur Übung selbst!

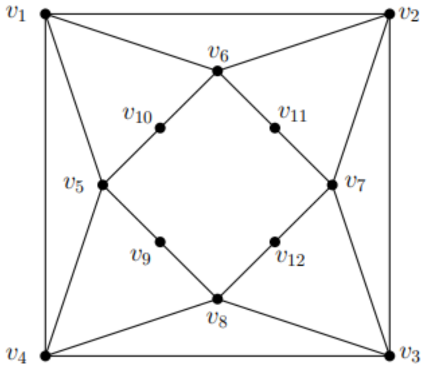
Kapitel 11.2 – Hamiltonkreise

Hamiltonkreise

Definition 11.10
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Ein Hamiltonscher Kreis in G ist ein geschlossener Pfad, der alle Knoten exakt einmal besucht.

Beispiel 11.11
(Verbindungen gehen in beide Richtungen)





<u>**Directed Hamiltonian Cycle (DHC)**</u>
Gegeben: *Gerichteter* Graph $\mathrm{D} = (V, E)$
Frage: Gibt es einen gerichteten Hamiltonkreis in D?

DHC ist NP-vollständig

Theorem 11.12
DHC ist NP-vollständig (bzgl. Polynomialzeit-Reduktionen).

Bemerkung 11.13:
Wir werden uns hier das Leben einfach halten und eine Poly.zeit-Reduktion nutzen.
Sie sind zwar schwächer als logspace-Reduktion, erfüllen aber auch wichtige Eigenschaften:

- Aus $\mathcal{L} \leq_m^{poly} \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}' \in$ NP folgt $\mathcal{L} \in$ NP.
- Aus $\mathcal{L} \leq_m^{poly} \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}$ ist NP-schwer folgt $\mathcal{L}'$ ist NP-schwer.
- Falls P $\neq$ NP, dann sind alle NP-schweren Probleme nicht in P enthalten.

DHC Membership

Lemma 11.14 „Membership“
DHC $\in$ NP.

Beweis.

- Rate eine Sequenz von Knoten $v_1, \dots, v_n$ der Länge $n = |V|$.
- Überprüfe:
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und $(v_n, v_1) \in E$.
  - Jeder Knoten kommt exakt einmal vor.
- Schlägt eine Überprüfung fehl, weise ab.

Dieser Algorithmus akzeptiert nur dann, wenn die Sequenz geratener Knoten einen Hamiltonkreis bilden. Dies geht nur, wenn dieser auch existiert.

Zeit: Linearzeit zum Raten, maximal quadratisch für die Überprüfung.

DHC Hardness

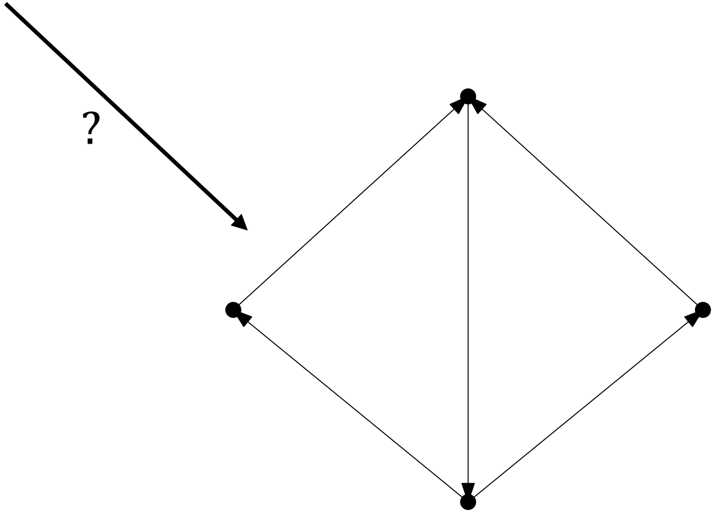
Lemma 11.15 „Hardness“
DHC ist NP-schwer.

Beweisidee.
Reduziere 3SAT auf DHC.

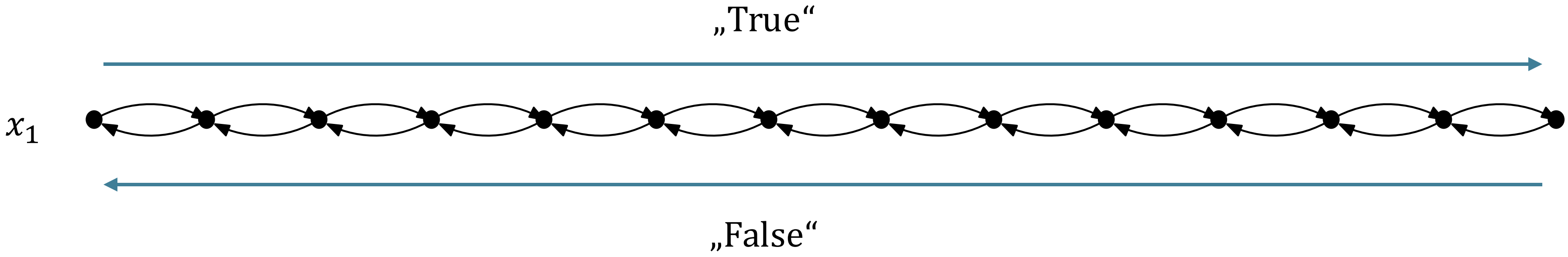
Wir benötigen:
- Ein *Gadget*, um die Variablenbelegung zu simulieren.
- Ein *Gadget*, um die Klauselbelegung zu verifizieren.

Reduktion 3SAT auf DHC

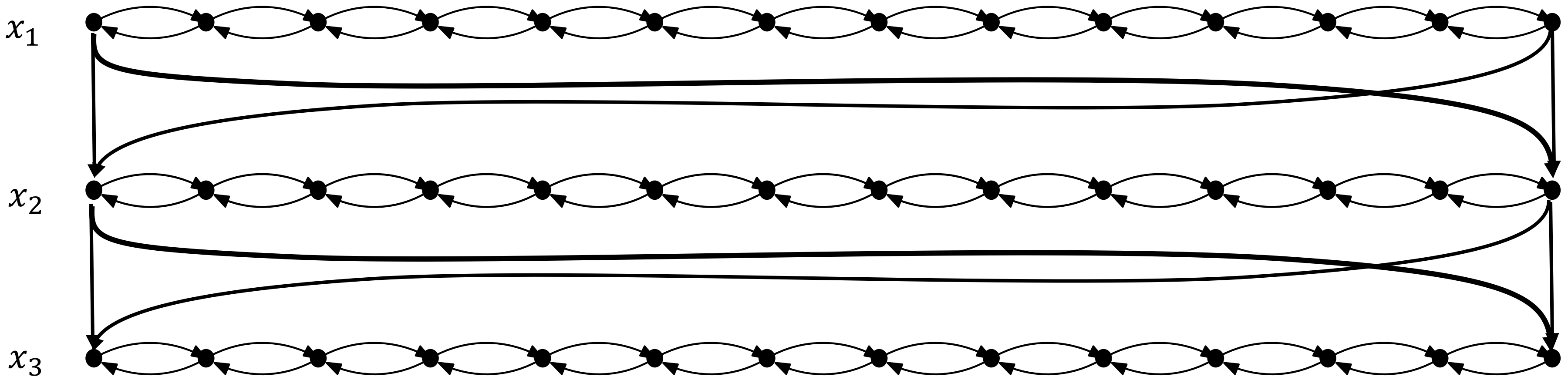
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



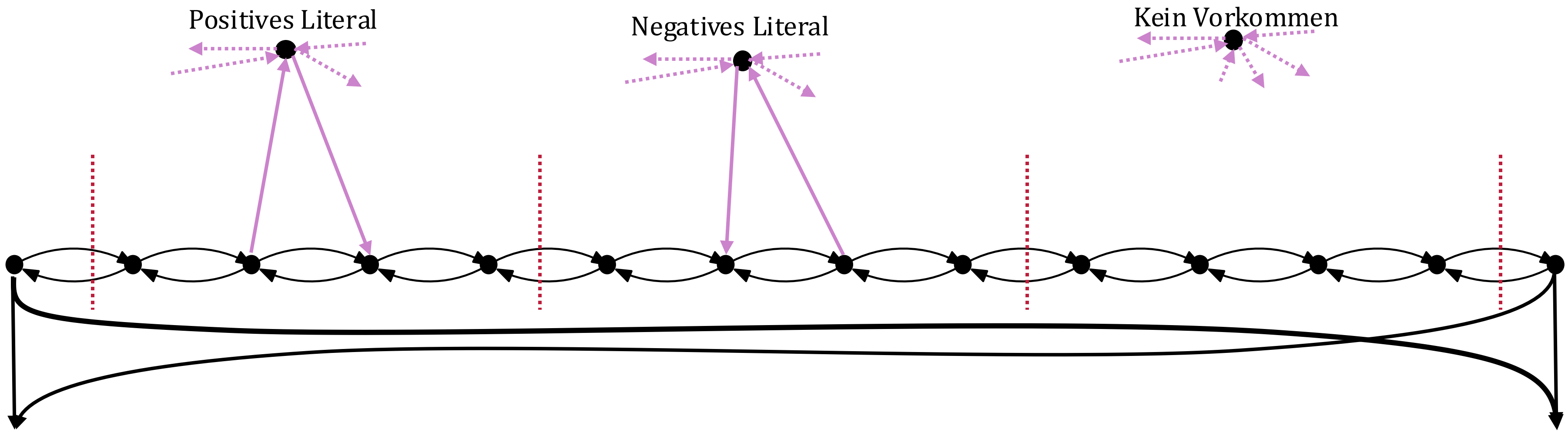
Variablen-Gadgets



Variablen-Gadgets

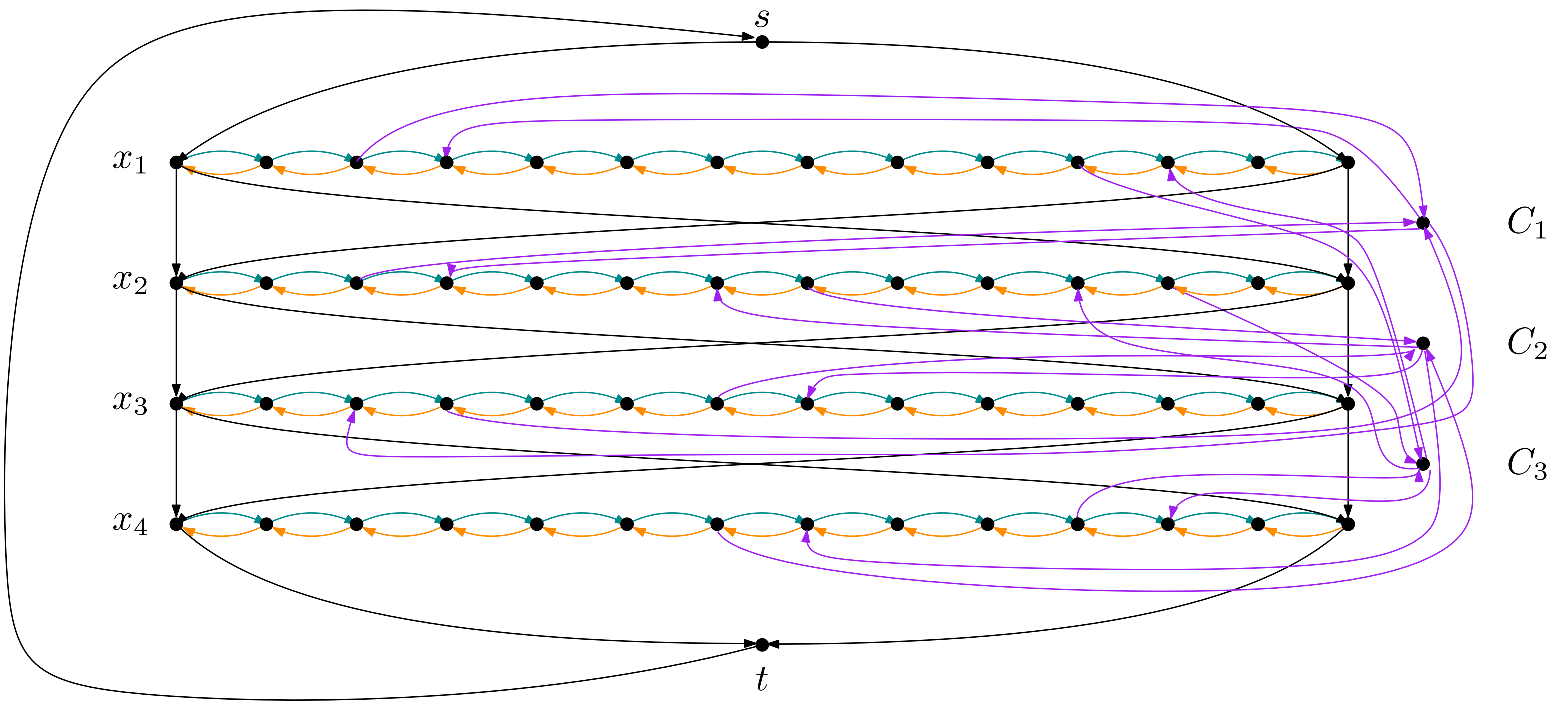


Klausel-Gadgets



Beispiel der Reduktion

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Korrektheit

„Wenn die Formel erfüllbar ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis."

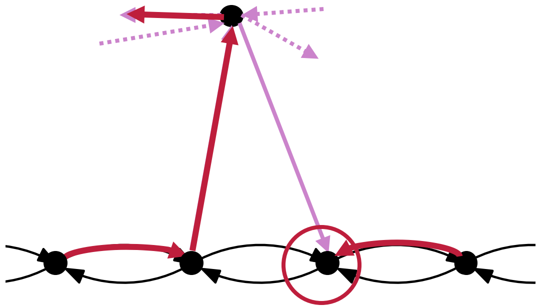
Laufe die Variablen Gadgets in der richtigen Richtung ab und laufe zwischendurch die Klauseln ab. (Nach Konstruktion möglich)

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar."

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück.
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde.

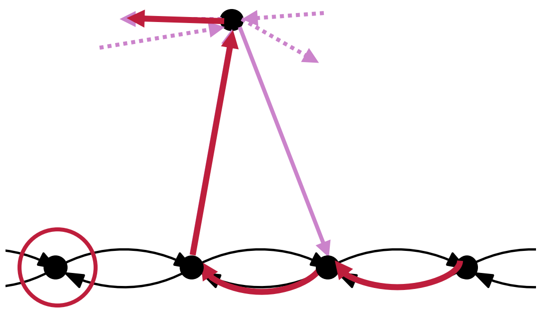
Man muss wieder zurück…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man geht nicht zurück.

Man muss richtig rum laufen…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man läuft Klauseln falsch ab.

Korrektheit

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück. ✓
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde. ✓

Also:

1. Variablen-Gadgets werden in einem Zug durchlaufen
   - Die Richtung gibt uns *true* oder *false*
2. Gibt es keine Belegung der Variablen, sodass φ erfüllt wird, so gibt es immer mindestens ein Klausel-Gadget, dass nicht abgelaufen werden kann.
   - Es gibt also keinen Hamiltonkreis.

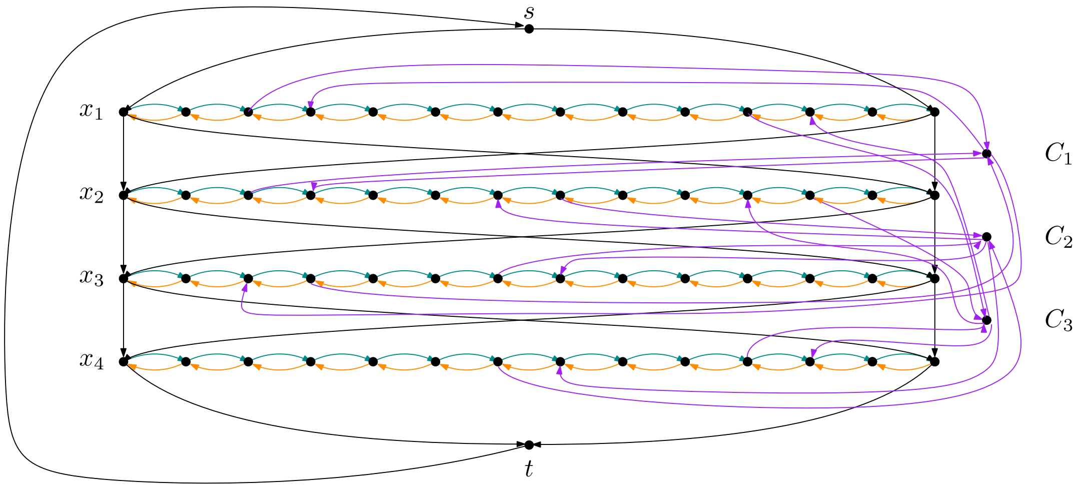
Laufzeit der Transformation

Wir erstellen einen Graphen mit

- $m + O(n) + 2$ Knoten
- $O(n + m)$ vielen Kanten

Wir brauchen also $O(n + m)$ Zeit, den Graphen zu erstellen.

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Weitere Probleme

<u>(Undirected) Hamiltonian Cycle (HC)</u>
Gegeben: *Ungerichteter* Graph $D = (V, E)$
Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in D?

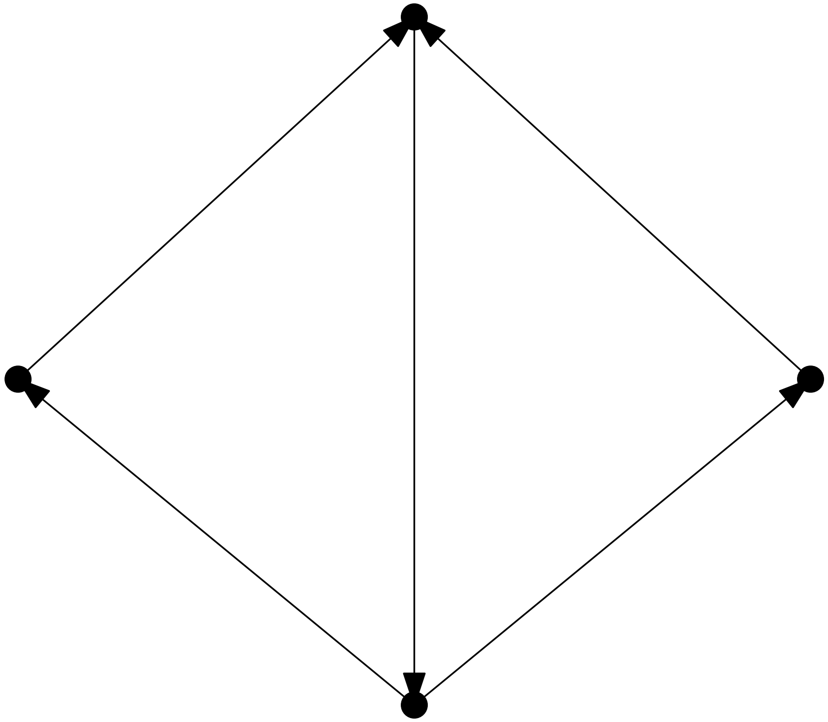
<u>(Integer) Traveling Salesman Problem (TSP)</u>
Gegeben: Graph $D = (V, E)$, Kostenfunktion $c: E \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$, Ganzzahl N
Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis $H \subseteq E$ in D, sodass $\sum_{e \in H} c(e) \leq N$?

Theorem
HC und TSP sind NP-vollständig.

Den Beweis zur Membership bleibt zur Übung offen. Wir schauen uns die Hardness an.

DHC auf HC

Reduktion von DHC auf HC

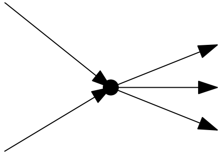


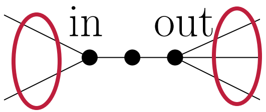
Wie kann man garantieren, dass im ungerichteten Graphen…

…nur eine der ursprünglich *eingehenden* Kanten verwendet wird?

…nur eine der ursprünglich *ausgehenden* Kanten verwendet wird?

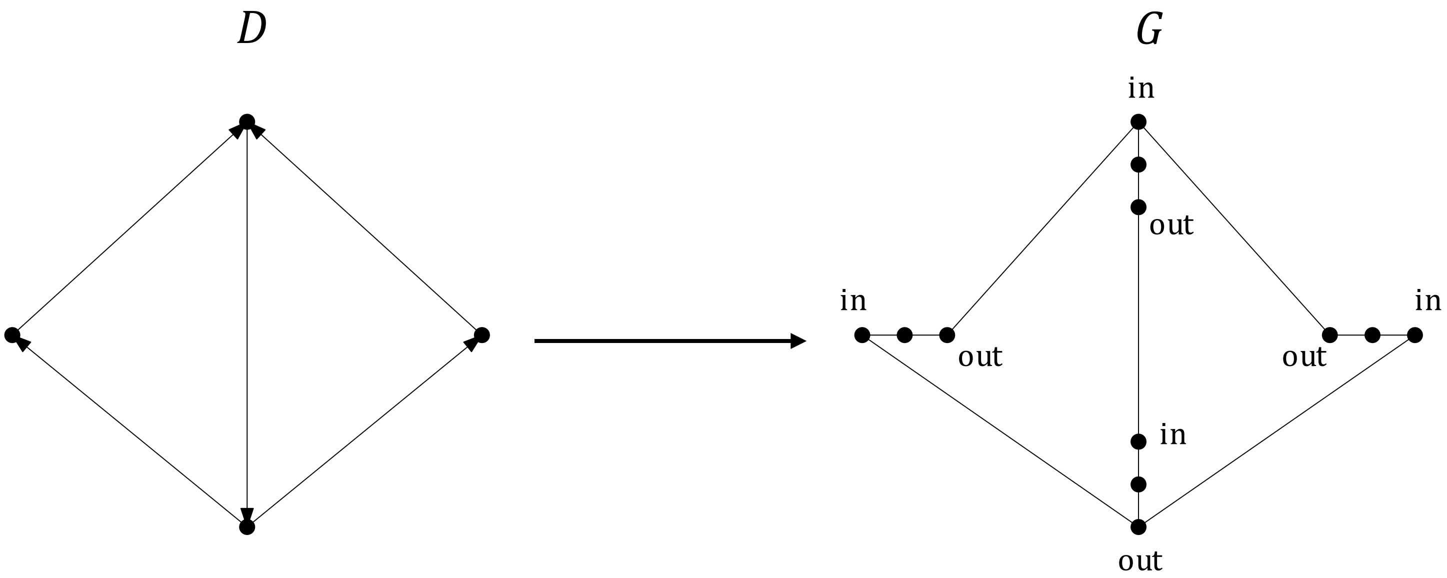
Idee: Teile Knoten auf!





Jeweils nur eine möglich!

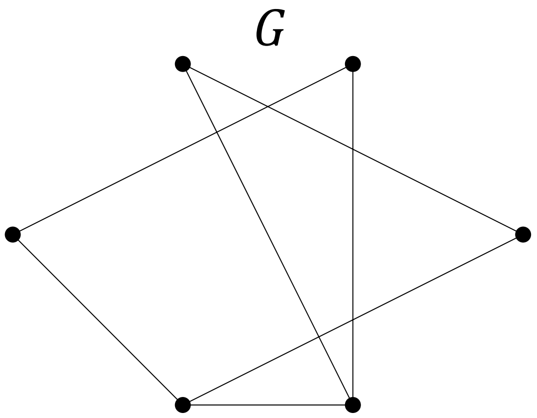
Reduktion von DHC auf HC



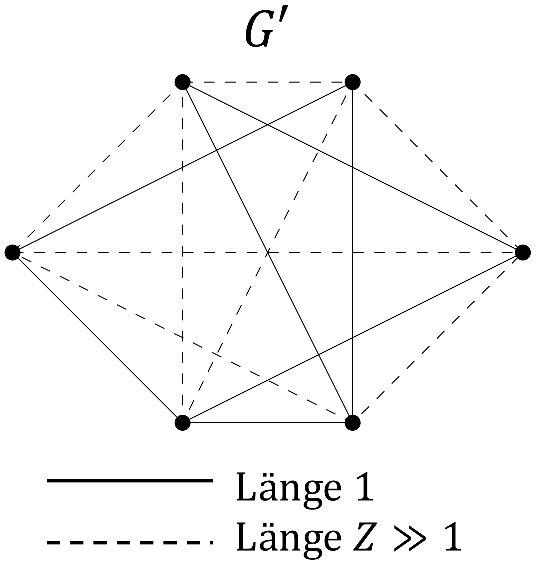
Zu zeigen
D besitzt genau dann einen gerichteten Hamiltonkreis, wenn G einen Hamiltonkreis besitzt.

HC auf TSP

Reduktion von HC auf TSP



Füge teure Kanten ein!



Zu zeigen

G besitzt genau dann einen Hamitonkreis, wenn G' eine Tour der Länge höchstens $n \coloneqq |V|$ besitzt.

Beweis Korrektheit

„ $\Rightarrow$ “

Wähle die gleichen Kanten von G in G'. Diese haben die Kosten n.

„ $\Leftarrow$ “

Besitzt G keinen Hamiltonkreis, so muss in G' mindestens eine Kante mit Gewicht N benutzt werden. Somit hat die Tour ein Gewicht von mindestens $n - 1 + Z > n$, da $Z > 1$.

Laufzeit

Es müssen $O(n^2)$ Kanten hinzugefügt werden.

Alle $O(n^2)$ Kanten müssen mit Kosten versehen werden.

Insgesamt also eine Laufzeit von $O(n^2)$.

Schwere 3SAT-Varianten

3SAT-Varianten

Diese Probleme sind alle NP-vollständig

SAT
Klauseln besitzen beliebig viele Literale

3SAT
Klauseln besitzen maximal 3 Literale

E3SAT
Exakt drei verschiedene Literale pro Klausel

E3SAT-4
Zusätzlich existiert jede Variable in maximal vier Klauseln

Monotone 3SAT
In jeder Klausel sind die Literale entweder alle positiv oder alle negativ

Planar 3SAT
Der Klausel-Variablen-Inzidenzgraph ist planar

Planar Monotone 3SAT
Zusätzlich sind alle Klauseln monoton

Oft hilfreich für geometrische Probleme

Noch mehr 3SAT Varianten

3SAT
Klauseln besitzen genau drei Literale

1-in-3SAT
In jeder Klausel darf maximal ein Literal *true* sein

Positive 1-in-3SAT
Zusätzlich sind alle Literale positive

Positive Planar 1-in-3SAT
Zusätzlich ist der Klausel-Variablen-Graph planar

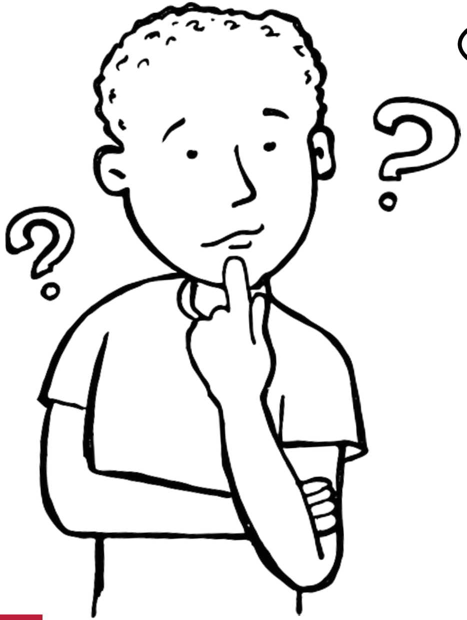
NAE 3SAT
In jeder Klausel dürfen nicht alle Literale den gleichen Wert besitzen

NAE = Not-All-Equal

Positive NAE 3SAT
Zusätzlich sind alle Literale positive

Diese Probleme sind alle NP-vollständig

Nächstes Mal



Können wir allgemein festhalten, wie wir Membership zeigen können?

Und wie sieht das mit coNP aus? Gibt es Probleme in coNP ∩ NP?