Technische
Universität
Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Korrektur

Platzverbrauch

Definition 7.11
Sei M eine TM mit read-only Eingabeband und m Arbeitsbändern (potentiell nicht-deterministisch). Sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe für M.

a) **Die Länge $|w| = |u.v|$ des Inhalts eines Arbeitsbandes in der Konfiguration $u\ q\ v$ von M ist die Länge des belegten Bandinhalts. $\sqcup$-Symbole links von u und rechts von v werden nicht mitgezählt.**
b) Sei c eine Konfiguration von M. Der **Platzverbrauch von M in Konfiguration c** ist
$$\text{Space}_M(c) = \max\{|w| \mid w \text{ ist der Inhalt eines Arbeitsbandes in Konfiguration } c\}$$
c) Der Platzverbrauch von M zu Eingabe x ist
$$\text{Space}_M(x) = \max\{\text{Space}_M(c) \mid c \text{ ist Konfiguration in einer Berechnung von } M \text{ zu Eingabe}\}$$

Ist der Platzverbrauch von M auf x unberschränkt, schreiben wir $\text{Space}_M(x) = \infty$.

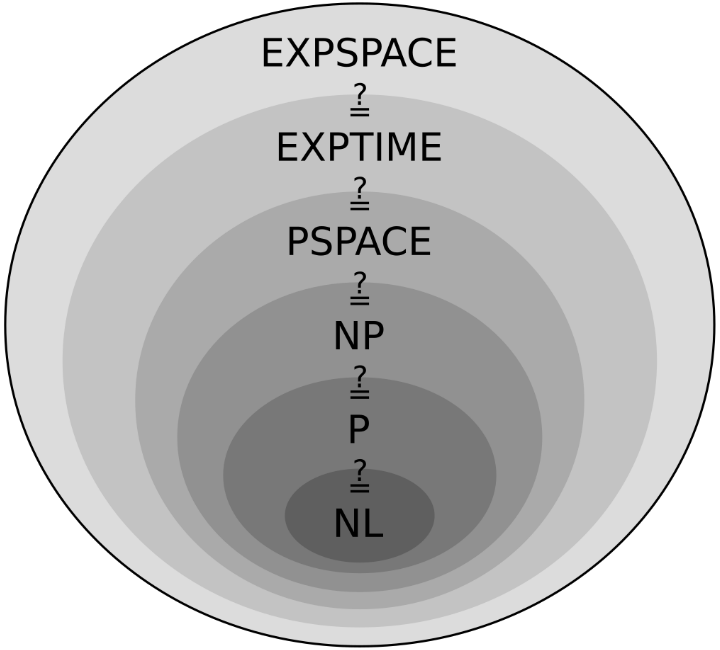
Kapitel 7.3 – Grundlegende Relationen

Relationen

Wie stehen die Klassen zueinander?
Da jede DTM auch eine NTM ist, gelten folgende Sätze:

Lemma 7.21
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m \in \mathbb{N}$ gilt
- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NTIME}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{DSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Korollar 7.22
Es gilt
$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}, \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}, \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}, \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{NEXP}$, usw.



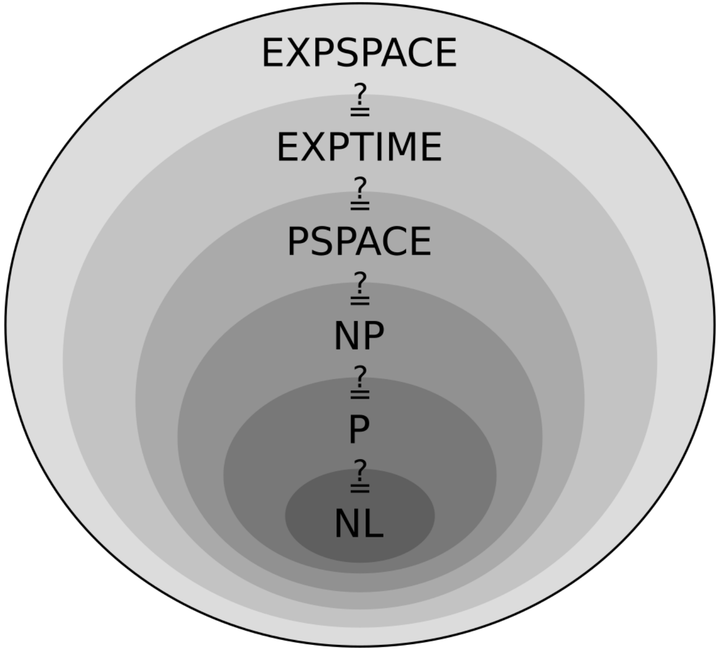
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

Relationen II

Auch recht klar: Wenn ich etwas schreiben muss, kostet es Zeit.

Lemma 7.23
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt
- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Beweisskizze:
Nutze in der read-only TM das erste Arbeitsband, um Änderungen am Eingabewort zu speichern.
Alle anderen Bänder arbeiten identisch.



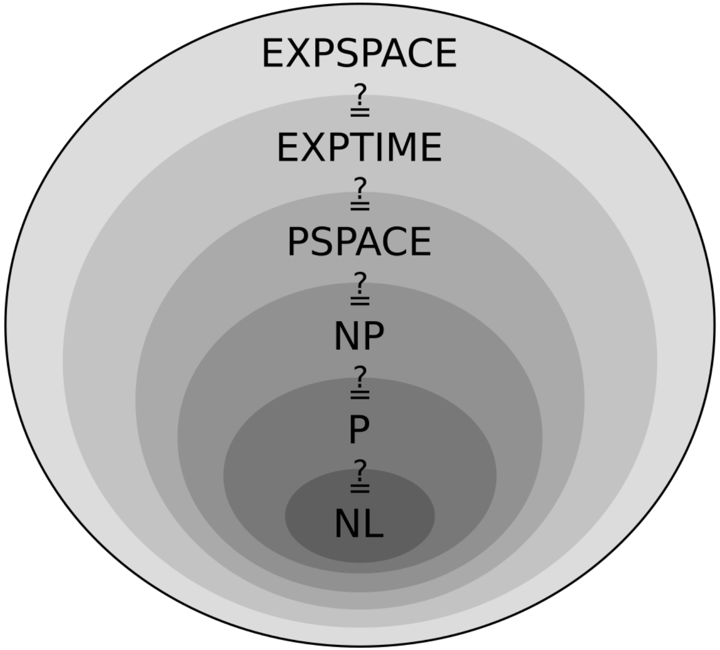
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

Relationen III

Auch recht klar: Wenn ich etwas schreiben muss, kostet es Zeit.

Lemma 7.23
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt
- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_m(f)$, sowie
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_m(f)$

Korollar 7.24
Es gilt
$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}, \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{NPSPACE}, \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$, usw.



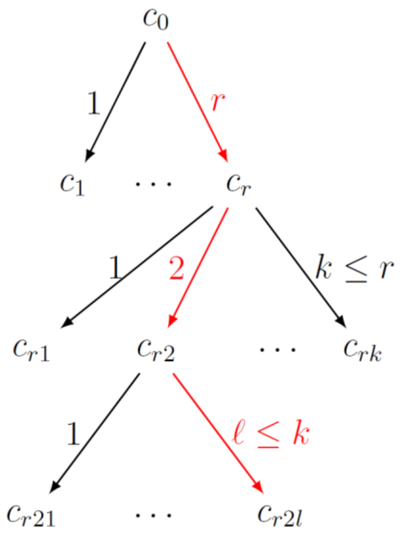
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

NTIME vs DSPACE

Lemma 7.25
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

$$\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_{m+1}(f)$$

Nach Th. 1.17 existiert zu jeder NTM M eine DTM M‘ mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ und wenn M Entscheider ist, dann auch M‘.



Prinzip: Tiefensuche im Berechnungsbaum von M zu Eingabe x.
Wenn M eine m-Band-TM ist, dann ist M‘ eine (m+2)-Band-TM:

- Erstes Band: Speichert x und ist read-only.
- Zweites Band: Pfad zum aktuellen Knoten im Baum.
- Restlichen m Bänder: Speichern der Konfiguration von M

Da M f-zeitbeschränkt, ist die Länge jeder Berechnung (also auch die Höhe des Berechnungsbaumes) durch f beschränkt.

NTIME vs DSPACE

Lemma 7.25
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

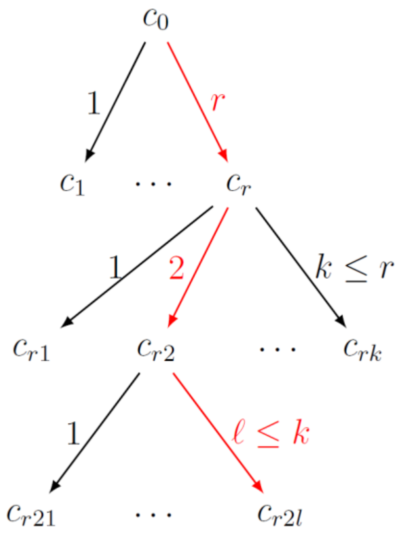
$$\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_{m+1}(f)$$

- Erstes Band: Speichert x und ist read-only.
- Zweites Band: Pfad zum aktuellen Knoten im Baum.
- Restlichen m Bänder: Speichern der Konfiguration von M

Da M f-zeitbeschränkt, ist die Länge jeder Berechnung (also auch die Höhe des Berechnungsbaumes) durch f beschränkt.

- Eingabe ist read-only, zählt also nicht.
- Berechnungsbaum hat höchstens Höhe $f(n)$, also kann der Pfad zu jedem Knoten mit $f(n)$ Richtungen beschrieben werden.
- Aus Lemma 7.23 folgt die Platzbeschränkung restlicher Bänder.

→ Wir benötigen nur m+1 Bänder mit höchstens $f(n)$ Platz.



Bandreduktionen

Wir zeigen gleich, dass das zusätzliche Arbeitsband auch eliminiert werden kann, ohne den Platzverbruach zu erhöhen. Damit folgt

Korollar 7.26
Es gilt

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}, \mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$$

Lemma 7.27
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Bandanzahl $m > 0$ gilt

- $\mathrm{DTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\big(O(f \cdot f)\big)$, sowie $\mathrm{DSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}_1\big(O(f)\big)$
- $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{NTIME}_1\big(O(f \cdot f)\big)$, sowie $\mathrm{NSPACE}_m(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}_1\big(O(f)\big)$

Skizze: Nutze das Lemma zur Bandreduktion.
Zeige dann, dass pro Simulationsschritt höchstens konstant oft über das gesamte Eingabewort gescannt werden muss, was zu einer Quadrierung der Laufzeit führt.
Die einzelnen Bänder können dann auch jeweils mit Laufzeit $f(n)$ simuliert werden.

Die Klasse P

Lemma 7.29
Für jedes $m > 0$ gilt

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O\left(n^k\right)\right)$$

Beweis „$\subseteq$":
$\mathrm{DTIME}_1\left(O\left(n^k\right)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_m\left(O\left(n^k\right)\right)$ ist klar.

Damit ist

$$\mathrm{P} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O\left(n^k\right)\right)$$

Die Klasse P

Lemma 7.29
Für jedes $m > 0$ gilt
$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right)$$

Beweis „⊇“:
$\mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\left(O(n^{2k})\right)$ nach Lemma 7.27.

Für jedes k ist diese Klasse in P enthalten, also ist
$$\mathrm{DTIME}_m\left(O(n^k)\right) \subseteq \mathrm{DTIME}_1\left(O(n^{2k})\right) \subseteq \mathrm{P}$$

NSPACE und DTIME

Proposition 7.30
Für jede Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) \geq \log n$, $\forall n$ gilt

$$\mathrm{NSPACE}(f) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(f)}\right)$$

Beweis: Später an der Tafel

Inklusion der Komplexitätsklassen

Korollar 7.31
Es gilt $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, und $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$

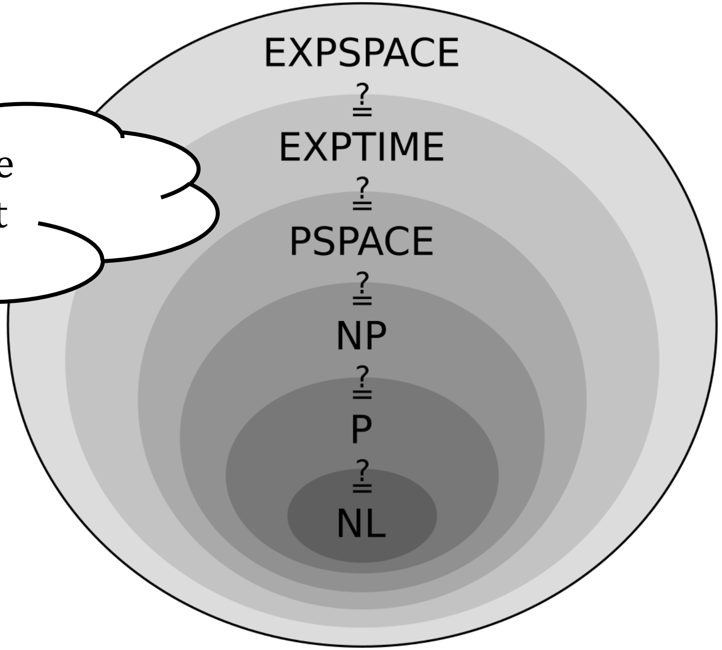
Theorem 7.32
Die robusten Komplexitätsklassen bilden eine aufsteigende Kette,

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE} \subseteq \cdots$$

Lemma 7.33
Die robusten Komplexitätsklassen sind unter polynomiellen Blowup abgeschlossen.
(bspw.: Ist $\mathrm{DTIME}\big(f(n)\big) \subseteq \mathrm{P}$ dann gilt auch $\mathrm{DTIME}\left(f\left(n^k\right)\right) \subseteq \mathrm{P}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Außer für L und NL folgt das aus der Definition.
Für L und NL können Logarithmengesetze genutzt werden, um die Aussage zu zeigen.

Komplexitätsklassen



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4353102

Kapitel 7.4 – Komplementklassen

Komplementklassen

Definition 7.34
Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Problemen. Dann ist die **Komplementklasse** von $\mathcal{C}$

$$\mathrm{co}\mathcal{C} = \{\, \bar{\mathcal{L}} \mid \mathcal{L} \in \mathcal{C} \,\}$$

die Klasse aller Komplementprobleme zu Problemen aus $\mathcal{C}$.

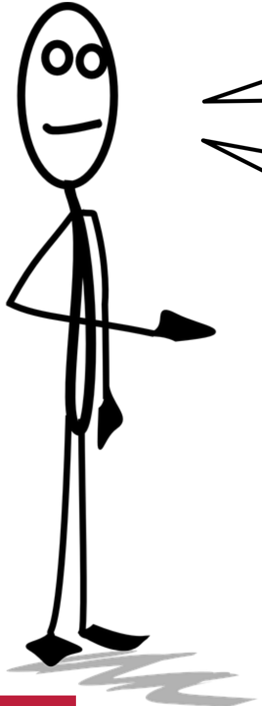
Achtung:
$\mathrm{co}\mathcal{C}$ ist nicht das Komplement von $\mathcal{C}$, sondern die Komplemente der Probleme in $\mathcal{C}$.

Man kann leicht folgendes Lemma zeigen.

Lemma 7.35
Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt DSPACE(f) = coDSPACE(f), sowie DTIME(f) = coDTIME(f).

Korollar 7.36
Es gilt L = coL, P = coP, PSPACE = coPSPACE, sowie EXP = coEXP.

Nicht-Determinismus



Lemma 7.35 kann man zeigen, in dem man DTMs baut und akzeptierende sowie nicht-akzeptierende Zustände tauscht.

Das funktioniert für NTMs nicht mehr!

$\mathcal{L}(M) = \{\, x \mid$ **es gibt** eine akzeptierende Berechnung von M zu $x \,\}$

Durch umdrehende der Zustände erhielte man
$\mathcal{L}(\overline{M}) = \{\, x \mid$ **es gibt** eine abweisende Berechnung von M zu $x \,\}$

Wir brauchen aber
$\overline{\mathcal{L}(M)} = \{\, x \mid$ **alle** Berechnungen von M zu x sind abweisend $\}$

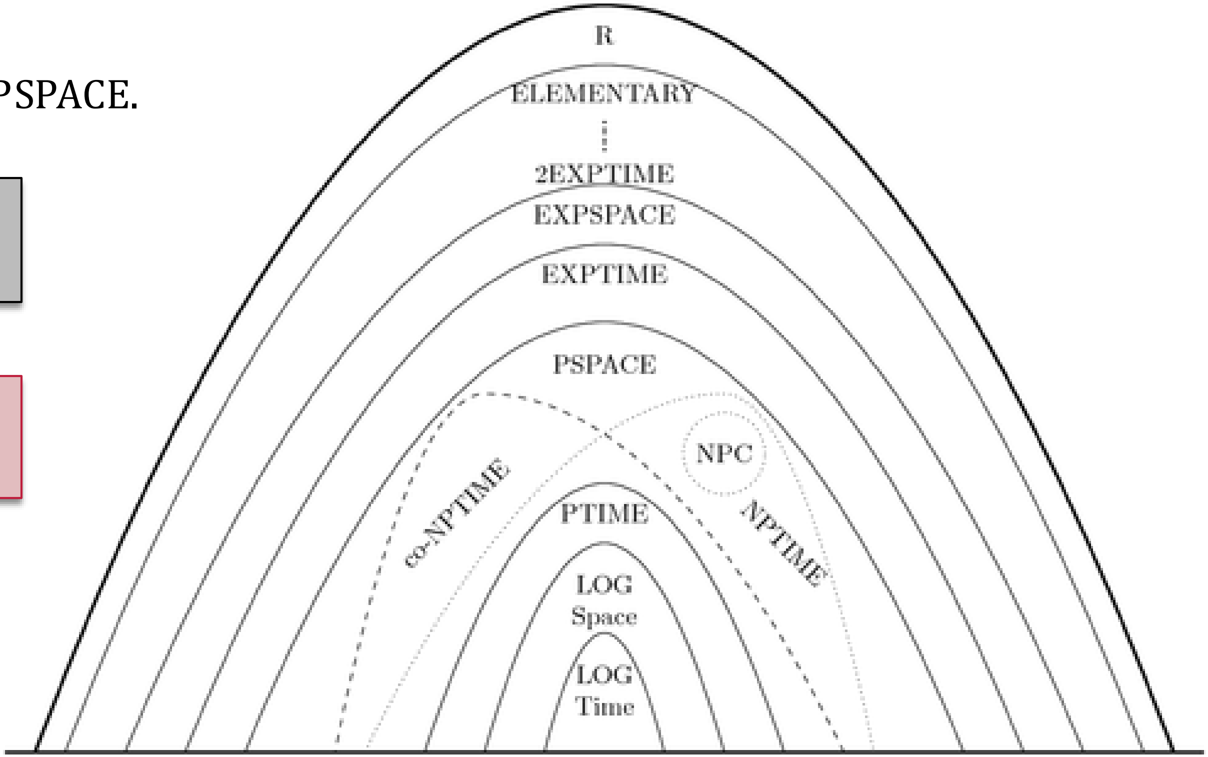
Komplement nicht-det. Komplexitätsklassen

Man kann zeigen:
NL = coNL und NPSPACE = coNPSPACE.

Offene Frage:
NP = coNP?

Lemma 7.37:
Es gilt P ⊆ coNP ⊆ PSPACE

Folgt aus monotonizität der co-Komplexitätsklassen.



Nächstes Kapitel

Das sind ganz schön viele Klassen.

Können wir die Inklusionen noch einmal grafisch festhalten?

Können wir die Komplexitätsklassen noch einmal genauer untersuchen?