Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Kapitel 5 – Satz von Rice


Welche Eigenschaften von Sprachen sind eigentlich unentscheidbar?
Fast alle!

Kapitel 5.1 – Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Lege Kopien der Kacheln so nebeneinander, das oben und unten derselbe Binärstring entsteht.

Geht das in diesem Beispiel?

1	10	011
101	00	11
1	2	3

Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Lege Kopien der Kacheln so nebeneinander, das oben und unten derselbe Binärstring entsteht.

Geht das in diesem Beispiel?

Ja! Sequenz ist 1323

1	10	011
101	00	11
1	2	3

1	011	10	011	101110011
101	11	00	11	101110011
1	3	2	3	

Definition 5.1 – Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

Lege Kopien der Kacheln so nebeneinander, das oben und unten derselbe Binärstring entsteht.

Geht das in diesem Beispiel?

1	10	011
101	00	11
1	2	3

<u>Postsches Korrespondenzproblem (PCP)</u>

Gegeben: Eine endliche Sequenz von Tupeln aus Wörtern $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$.

Frage: Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1 \dots i_n$ mit

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}?$$

Unentscheidbarkeit

Theorem 5.3
Das PCP ist unentscheidbar.

Wir betrachten zunächst eine modifizierte Variante.

Modifiziertes Postsches Korrespondenzproblem (MPCP)
Gegeben: Eine endliche Sequenz von Tupeln aus Wörtern $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.
Frage: Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1 \ldots i_n$ mit

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n} \text{ und } i_1 = 1?$$

Lemma 5.4
MPCP $\leq$ PCP.

Beweisskizze

Lemma 5.4
MPCP $\leq$ PCP.

Für $w = a_1 a_2 \dots a_m \in \Sigma^*$ betrachte

$$\overline{w} = \#a_1\#a_2\# \dots \#a_m\#$$
$$w` = \#a_1\#a_2\# \dots \#a_m$$
$$w´ = a_1\#a_2\# \dots \#a_m\#$$

Für eine gegebene MPCP Instanz $K = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ konstruiere die Instanz

$$f(K) = (\overline{x_1}, y_1`), (x_1´, y_1`), (x_2´, y_2`), \dots, (x_k´, y_k`), (\$, \#\$)$$

“=>”

Hat K eine Lösung $i_1 = 1, i_2, \dots i_n$, dann hat $f(K)$ sie Lösung $1, i_2 + 1, i_3 + 1, \dots, i_n + 1, k + 2$.

Beweisskizze

Lemma 5.4
MPCP $\leq$ PCP.

Für $w = a_1 a_2 \dots a_m \in \Sigma^*$ betrachte

$$\bar{w} = \#a_1\#a_2\# \dots \#a_m\#$$
$$w\grave{} = \#a_1\#a_2\# \dots \#a_m$$
$$w\acute{} = a_1\#a_2\# \dots \#a_m\#$$

Für eine gegebene MPCP Instanz $K = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ konstruiere die Instanz

$$f(K) = (\overline{x_1}, y_1\grave{}), (x_1\acute{}, y_1\grave{}), (x_2\acute{}, y_2\grave{}), \dots, (x_k\acute{}, y_k\grave{}), (\$, \#\$)$$

"<="

Betrachte eine Lösung von $f(K)$ minimaler Länge $i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, k+2\}^*$.
Dann ist nach Konstruktion $i_1 = 1$ und $i_n = k+2$.
1 und k+2 tauchen nur einmal auf! (Warum?)
Damit ist $1, i_2 - 1, \dots, i_{n-1} - 1$ eine Lösung für K.

Unentscheidbarkeit

Theorem 5.3
Das PCP ist unentscheidbar.

Wir betrachten zunächst eine modifizierte Variante.

Modifiziertes Postsches Korrespondenzproblem (MPCP)
Gegeben: Eine endliche Sequenz von Tupeln aus Wörtern $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.
Frage: Gibt es eine endliche, nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1 \ldots i_n$ mit

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n} \text{ und } i_1 = 1?$$

Lemma 5.4
MPCP $\leq$ PCP.

Lemma 5.5
ACCEPT $\leq$ MPCP.

Beweisidee

Lemma 5.5

ACCEPT $\leq$ MPCP.

Codiere für die Eingabe $w\#x$ von ACCEPT die Konfigurationen $c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \ \dots \rightarrow c_t$ von M_w.
MPCP soll dann eine Lösung der Form $\#c_0\#c_1\# \dots \#c_t\#c_t'\# \dots \#q_{acc}\#\#$
Dabei erhält y eine Konfiguration Vorsprung:

$$
\begin{array}{ll}
x\text{-Sequenz}: & \overbrace{\#}^{1}\ \overbrace{q_0a_1}^{2}\ \overbrace{a_2}^{3}\dots\overbrace{a_n}^{n+1}\ \overbrace{\#}^{n+2} \\
y\text{-Sequenz}: & \underbrace{\#\ q_0\ a_1\ a_2\ \dots\ a_n\ \#}_{1}\ \underbrace{q_1b}_{2}\ \underbrace{a_2}_{3}\dots\underbrace{a_n}_{n+1}\ \underbrace{\#}_{n+2}
\end{array}
$$

Ist c_t erreicht, muss dieser Vorsprung wieder behoben werden

$$
\begin{array}{ll}
x\text{-Sequenz}: & \#c_0\#c_1\#\dots\#c_t\#\overbrace{\quad\dots\quad}^{\text{Löschen}}\# \\
y\text{-Sequenz}: & \#c_0\#c_1\#\dots\#c_t\#\underbrace{\quad\dots\quad}_{\text{Löschen}}\#q_{acc}\#
\end{array}
$$

Bemerkung 5.6

Für $k \in \mathbb{N}$ ist PCPk das PCP für Instanzen mit genau k Paaren.

Für $k = 1$ ist es trivial entscheidbar.
Für $k = 2$ ist es auch entscheidbar.

Für $k \in \{3,4\}$ ist es unbekannt.

Für $k \geq 5$ ist es unentscheidbar.

Kapitel 5.2 – Satz von Rice

Nicht-Triviale Eigenschaften

Definition 5.7
Sei Σ ein Alphabet. Wir bezeichnen mit $\mathrm{RE}(\Sigma)$ die Menge aller rekursiv-aufzählbaren (semi-entscheidbaren) Sprachen über Σ, also die Menge aller Sprachen $\mathcal{L}$, zu denen eine TM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}$ existiert.

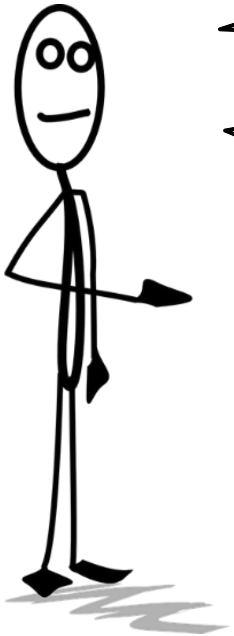
Eine **Eigenschaft** P der Sprachen in $\mathrm{RE}(\Sigma)$ ist eine Funktion

$$P: \mathrm{RE}(\Sigma) \to \{0,1\} \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{B} = \{\text{false}, \text{true}\}.$$

Wir sagen, dass eine Sprache $\mathcal{L} \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ Eigenschaft P hat, falls $P(\mathcal{L}) = 1$ gilt.

Eine Eigenschaft heißt **trivial**, wenn P eine konstante Funktion ist. Andernfalls heißt die Eigenschaft **nicht-trivial**.

Bemerkungen



Für nicht-triviale Eigenschaften existieren also Sprachen $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ mit $P(\mathcal{L}) = 1$ und welche mit $P(\mathcal{L}) = 0$.

Wir können die Sprache über eine definierende TM beschreiben, damit ist P die Sprache

$$P = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid P\big(\mathcal{L}(M_w)\big) \,\}$$

Beachte: P beschreibt Eigenschaften von Sprachen; nicht von Turing-Maschinen!

Beispiele 5.8

Nicht-Triviale Eigenschaften

- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_w)$ ist endlich.
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_w)$ ist regulär.
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_w)$ ist kontextfrei.
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_w)$ ist entscheidbar.
- $10110 \in \mathcal{L}$, d.h. M_w akzeptiert Eingabe 10110.
- $\mathcal{L} = \Sigma^*$, d.h. M_w ist universell.

Eigenschaften von TMs

- M_w hat 481 Kontrollzustände.
- Die Berechnung von M_w auf Eingabe 10110 hält nach höchstens 10 Schritten.
- M_w ist ein Entscheider.
- Es gibt eine kleinere TM mit derselben Sprache

Triviale Eigenschaften

- $\mathcal{L}$ ist Bild einer totalen berechenbaren Funktion.
- $\mathcal{L}$ ist nicht-semi-entscheidbar.

Satz von Rice

Theorem 5.9
Jede nicht-triviale Eigenschaft der semi-entscheidbaren Sprachen ist unentscheidbar.

Beweis: Tafel!