Technische Universität Braunschweig

Theoretische Informatik 2

Arne Schmidt

Rekursive Sprachen

Definition 3.22
Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist **rekursiv aufzählbar**, wenn $A = \emptyset$ gilt, oder es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gibt mit $A = \{f(0), f(1), \dots\} = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Wir sagen, dass A von f rekursiv aufgezählt wird.

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist **rekursiv**, falls sowohl A als auch $\bar{A}$ rekursiv aufzählbar sind.

Bemerkung: Beachte, dass $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$ erlaubt ist.

Theorem 3.23
Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann rekursiv auszählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Beweis: Tafel!

Rekursive Sprachen

Korollar 3.24
Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann rekursiv, wenn sie entscheidbar ist.

Korollar 3.25
Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist semi-entscheidbar.
2. A ist rekursiv aufzählbar.
3. Es gibt eine TM M mit $\mathcal{L}(M) = A$.
4. Es gibt einen Aufzählungsalgorithmus für A, d.h. A ist der Wertebereich einer totalen berechenbaren Funktion $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$.
5. χ'_A ist berechenbar.
6. A ist der Definitionsbereich einer partiellen berechenbaren Funktion $g: \Sigma^* \to_p \Sigma_2^*$.

Abzählbar vs. Aufzählbar

Abzählbar
Jedem Element kann einer Zahl aus $\mathbb{N}$ zugewiesen werden.

Beispiele:
1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sind abzählbar.
2. Jede Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist abzählbar.
3. Σ^* ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar.
5. $\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind nicht abzählbar.
6. Die Menge aller Sprachen ist nicht abzählbar.

Aufzählbar
Es gibt nicht nur eine Abzählung, sondern die Abzählung muss als Algorithmus implementierbar sein.

Beispiele:
1. Σ^* ist rekursiv aufzählbar.
2. Es existieren Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$, die nicht semi-entscheidbar und damit nicht rekursiv aufzählbar sind.

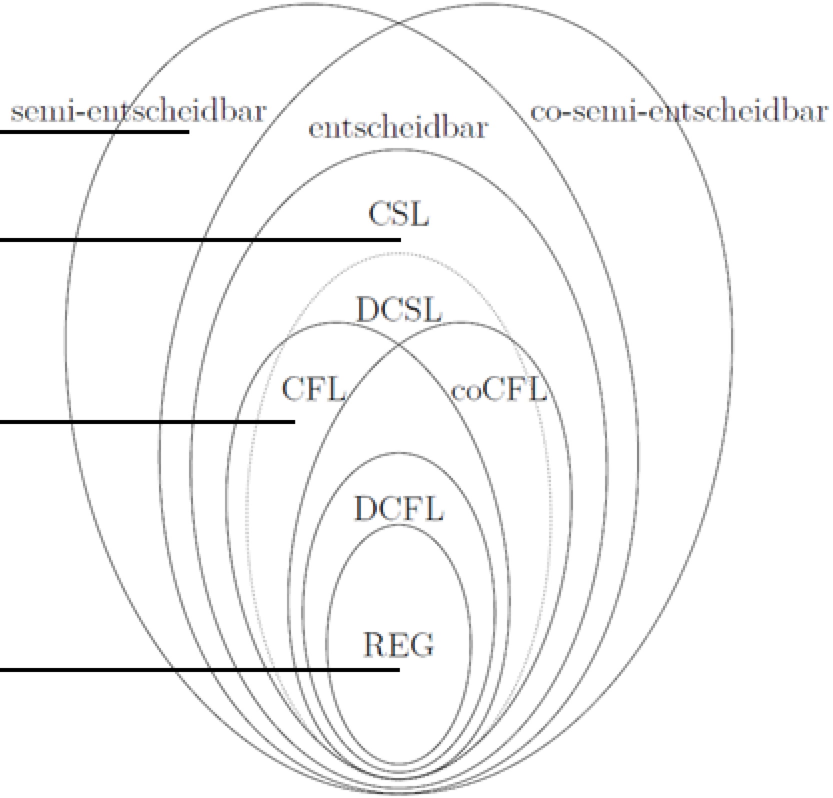
Überblick

Turing-Maschinen

Linear-beschränkter Automat

Keller-Automat (Pushdown Automat)

Endlicher Automat



Kapitel 4 - Unentscheidbarkeit

Unentscheidbarkeit

Es gibt entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen.

Gibt es unentscheidbare Sprachen?

Gibt es auch semi-entscheidbare Sprachen, die unentscheidbar sind?

Unentscheidbarkeit

Es gibt entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen.

Beweis ähnlich zu nicht-berechenbaren Funktionen

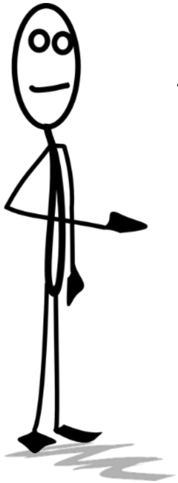
Gibt es unentscheidbare Sprachen?

Gibt es auch semi-entscheidbare Sprachen, die unentscheidbar sind?

Betrachten wir ein mal ein Problem, welches semi-entscheidbar ist.

Akzeptanzproblem

Gegeben: Eine Turing-Maschine M und eine Eingabe x.
Frage: Akzeptiert M Eingabe x, d.h. gilt $x \in \mathcal{L}(M)$?



Solche Probleme werden auch Verifikationsprobleme genannt.

Ein Programm selbst ist Teil des Inputs.

Akzeptanzproblem

Gegeben: Eine Turing-Maschine M und eine Eingabe x.
Frage: Akzeptiert M Eingabe x, d.h. gilt $x \in \mathcal{L}(M)$?