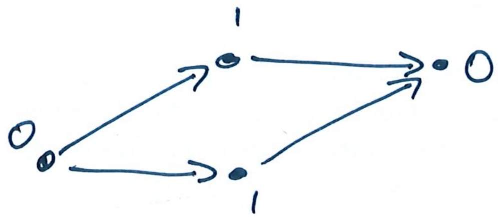
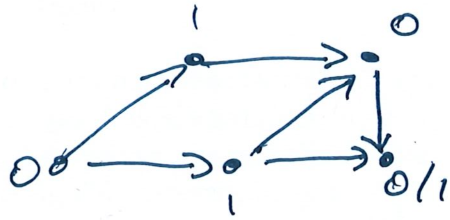
Theo 2-übung

Zeige: 2-Färbbarkeit in ~~(gerichteten)~~ Graphen ist ~~NL-vollständig~~ in L.

Ein Graph $G=(V,E)$ ist zweifärbbar, wenn es eine Funktion $c: V \to \{0,1\}$ gibt, sodass $\forall \overset{=\{u,v\}}{e} \in E$ gilt $c(u) \neq c(v)$ (für ger. Graphen analog)



2-färbbar



nicht 2-färbbar

Lemma: Ein Graph $G=(V,E)$ ist 2-färbbar gdw. in G kein ungerichteter Kreis ungerader Länge existiert.

"$\Rightarrow$" Annahme, es ex. ungerader Kreis $(v_1, \dots, v_k)$ mit $k \bmod 2 = 1$. Da jeder gerade Index nur zu ~~einem~~ ungeraden Indizes benachbart sind muss $c(v_i) \neq c(v_j)$ mit $i \bmod 2 = 0$, $j \bmod 2 = 1$
$\Rightarrow$ gerade Indizizes erhalten Farbe 0, ungerade erhalten Farbe 1. Damit ist aber $c(v_1) = c(v_k)$ $\lightning$ keine gültige Färbung.

"$\Leftarrow$" Wenn es keinen ungeraden Kreis gibt, wollen wir eine Zweiffärbung berechnen:

1. Wähle bel. Knoten $s \in V$.
2. Bestimme BFS-Baum in G mit start s.
   $\rightarrow$ man erhält Distanzen $d(v)$ zu s.
3. Setze $c(v) := d(v) \bmod 2$.

Angenommen, diese Färbung ist nicht gültig.
Dann existieren $v, w \in V$ mit $c(v) = c(w)$ und $\{v, w\} \in E$.
Nach Konstruktion ist $d(v) = d(w)$.
(andernfalls wäre BFS-Baum nicht korrekt.)
Dann ist aber $s \rightarrow^* v \rightarrow w \rightarrow^* s$ ein (ungerichteter) Kreis der Länge $d(v) + d(w) + 1 = 2d(v) + 1$, also ungerade. $\lightning$

$\Rightarrow$ Färbung ist valide. $\square$

Um zu überprüfen, ob ein Graph 2-färbbar ist, reicht es also aus zu überprüfen, ob der Graph einen ungeraden Kreis besitzt.
Nenne dieses Problem odd-cycle.

Nach dem Lemma ist klar:

$$2\text{-Col.} \le_m^{\log} \text{Odd-cycle}$$
$$\text{Odd-cycle} \le_m^{\log} 2\text{-Col.}$$

Wichtig: Für Odd-Cycle würden wir gerichtete Kanten als ungerichtete Kanten betrachten.

Problem: Undirected-s-t-PATH (USTCON)
Gegeben: ungerichteter Graph $G=(V,E)$, Knoten $s,t \in V$.
Frage: Existiert ein Pfad von s nach t in G?

Man kann zeigen: • USTCON $\in L$.
• $\overline{\text{USTCON}} \in L$.

~~Probl~~ Probieren wir folgendes:

Odd-Cycle $\leq_m^{\log}$ ~~USTCON~~ USTCON

Betrachte folgende Reduktion:

Erstelle einen Graphen $G'=(V',E')$ mit
$V' = V \times \{0,1\}$. ~~und~~
Für jede Kante $\{u,v\} \in E$ füge Kanten
$\{(u,0),(v,1)\}$ und $\{(v,0),(u,1)\}$ zu E' hinzu.

Claim:
G besitzt genau dann einen ungeraden Kreis der s beinhaltet, wenn
G' einen $(s,0)-(s,1)$-Pfad besitzt.

"$\Rightarrow$" Angenommen, es existiert ein ungerader Kreis $(s, v_0, v_1, \dots, v_k)$ mit $k \bmod 2 = 1$

In G' entspricht dies der Folge

$(s,0), (v_0,1), (v_1,0), \dots, (v_k,0), (s,1)$

$\Rightarrow$ Es existiert ein $(s,0)$-$(s,1)$-Pfad.

"$\Leftarrow$"

Angenommen es existiert ein $(s,0)$-$(s,1)$-Pfad. Sei dazu $P = \big((s,0), (v_0,1), (v_1,0), \dots, (v_k,0), (s,1)\big)$ so kurz wie möglich.

~~$\Rightarrow$ Acht... v_i taucht doppelt auf.~~

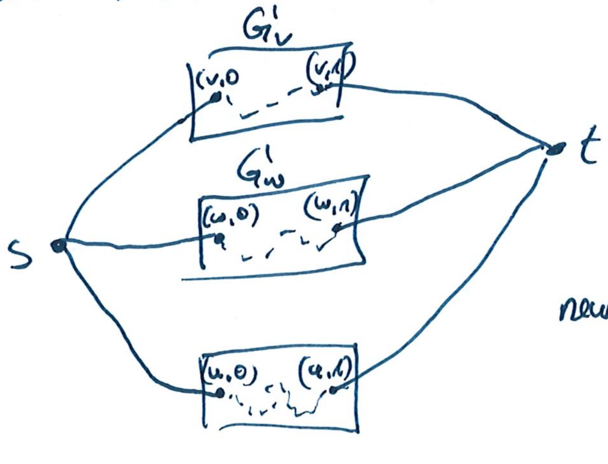
~~(Kantenfolge könnte man P in zwei Kreise~~

Dann besitzt P gerade viele Knoten (auf jede 0 folgt eine 1). Da $(s,0) \equiv (s,1)$ in G, muss der erhaltene Kreis $(s, v_0, v_1, \dots, v_k)$ ungerade sein. $\square$

Nun muss s nicht auf dem Kreis liegen!

Sei G'_v der konstruierte Graph wie oben beschrieben.

Erstelle G'_v für jeden $v \in V$, füge Knoten s, t hinzu, sowie Kanten $s \to (v,0)$ in G'_v sowie $(v,1) \to t$ mit $(v,1) \in G'_v$



Damit folgt

G enthält ungeraden Kreis

$\Longleftrightarrow$

neuer Graph besitzt s-t-Pfad.