Große Übung 27.05.25

A) Zeige: Totality ist nicht semi-entscheidbar.

$\overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon} \leq \text{TOTALITY}$

Das Problem: Akzeptiert M_w ε nicht, terminiert M_w möglicherweise nicht.

Betrachte $\overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon}$ etwas anders für w:

$\forall i \in \mathbb{N}$: M_w akzeptiert ε nicht nach i Schritten

Betrachte damit Maschine $M_{w'}$ mit $w' = f(w)$, die folgendes für ein Wort $x \in \Sigma^*$ durchfährt.

1. Berechne $i = |x|$
2. Simuliere M_w auf ε für i Schritte
3. Akzeptiert M_w nach i Schritten, gehe in Endlosschleife
4. Ansonsten halte.

Zu zeigen: M_w akzeptiert ε nicht $\Leftrightarrow$ $M_{w'}$ auf jeder Eingabe hält

$w \notin \overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon}$, d.h. M_w akzeptiert ε nach $k \in \mathbb{N}$ vielen Schritten.

Dann wird $M_{w'}$ in eine Endlosschleife für Wörter $x \in \Sigma^{\geq k}$ laufen.

Also ist $w' = f(w) \notin \text{TOTALITY}$.

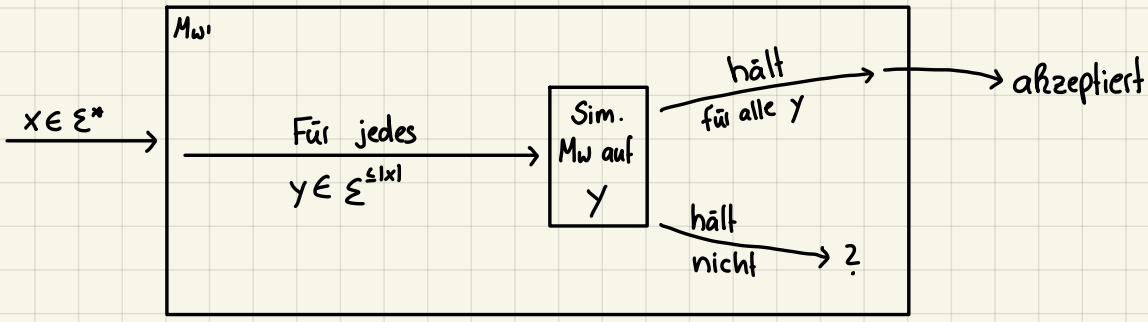
$w \in \text{TOTALITY}$, dann kann $M_{w'}$ nur in eine Endlosschleife geraten, wenn für ein $x \in \Sigma^*$ die Simulation von M_w auf ε nach $|x|$ Schritten akzeptiert.

Also ist $M_w \notin \overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon}$.

B) Sei $L_1 = \{ w \mid \exists x \in L(M_w) : \forall y \in \Sigma^{\geq |x|} : y \in L(M_w) \}$

Zeige oder widerlege: L_1 ist (co-) semi-entscheidbar.

Idee: Zeige $\text{TOTALITY} \leq L_1$



Konstruiere $M_{w'}$ wie folgt:

- $M_{w'}$ erhält Eingabe $x \in \Sigma^*$
- Für jedes $y \in \Sigma^{\leq |x|}$
  - Simuliere M_w auf y
- Akzeptiere x

Angenommen $w \in$ TOTALITY, dann hält M_w auf jeder Eingabe. Damit hält die Simulation von M_w in $M_{w'}$ immer. Auch die anderen Schritte sind endlich $\Rightarrow w' \in L_1$, da $L(M_{w'}) = \Sigma^*$.

Angenommen $w \notin$ TOTALITY, dann existiert $y \in \Sigma^*$ auf dem M_w nicht hält. Damit hält $M_{w'}$ auf keinem $x \in \Sigma^*$ mit $|x| \geq |y|$, d.h. es gibt kein Wort mehr, ab welchem wir alle größeren Wörter akzeptieren $\Rightarrow w' \notin L_1$.

$L_1' = \{w \mid \exists x \in L(M_w) : \forall y \in \Sigma^{\leq x} : y \in L(M_w)\}$ ist semi-entscheidbar, aber nicht co-semi-entscheidbar.

↳ Liegt ε in der Sprache? (hinter diesem Problem liegt im Prinzip $\text{ACCEPT}_\varepsilon$)

E) $\text{PCP}_{\equiv r}$: wie 0-1-PCP,

gegeben: $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ mit $x_i, y_i \in \{0,1\}^*$

gesucht: Eine nicht-leere, endliche Sequenz $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \bmod r = 0$

Zeige : $0\text{-}1\text{-}PCP \leq PCP_{\equiv r}$

Kacheln bleiben unverändert.

Annahme: $I = i_1 i_2 \dots i_n$ ist eine Lösung für PCP mit

$n \bmod r = q \in \{0, \dots, r-1\}$.

$I^r = \underbrace{III\dots I}_{r\text{-mal}}$ ist auch eine Lösung für PCP mit Länge

$r \cdot n$, also $\bmod r = 0$. D.h. $PCP_{\equiv r}$ ist lösbar.

Ist $PCP_{\equiv r}$ lösbar, dann ist diese Lösung auch gültig für PCP.

$PCP_{\leq k}$ wie PCP, nur dass die Lösung höchstens k Kacheln nutzt.

→ ist entscheidbar

→ man muss nur endlich viele Möglichkeit überprüfen

D) Seien $a, b \in \Sigma^*$ und $L_{a,b} = \{w \mid a \in L(M_w) \text{ und } b \notin L(M_w)\}$

Zeige mit Hilfe des Satzes von Rice über monotone Eigenschaften, dass $L_{a,b}$ weder semi- noch co-semi-entscheidbar ist.

Betrachte:

- $L_1 = \{a\} \in L_{a,b}$
- $L_2 = \{a,b\} \notin L_{a,b}$

} Eigenschaft nicht monoton
=> nicht semi-entscheidbar

$\overline{L_{a,b}} = \{w \mid a \notin L(M_w) \text{ oder } b \in L(M_w)\}$

- $L_0 = \{\varepsilon\} \in \overline{L_{a,b}}$
- $L_1 = \{\varepsilon, a\} \notin \overline{L_{a,b}}$

} => Komplement Eigenschaft ist nicht monoton.

=> $L_{a,b}$ nicht co-semi-entscheidbar