Betrachte folgendes Problem:

Totality

Gegeben: TM M

~~Gesucht~~

Frage: Hält M auf jeder Eingabe?

Als Sprache TOTALITY $= \{w \mid M_w$ hält immer$\}$

1. Zeige: Totality ist nicht semi-entscheidbar
   (z.B. durch Reduktion von einem nicht semi-entscheidbaren Problem)

2. Zeige: Totality ist nicht co-semi-entscheidbar.

Bekannte Probleme:

	Komplement
$ACCEPT = \{w\#x \mid M_w$ akzeptiert $x\}$	$\overline{ACCEPT} = \{w\#x \mid M_w$ akz. x nicht$\}$
$ACCEPT_\varepsilon = \{w \mid M_w$ akz. $\varepsilon\}$	$\overline{ACCEPT_\varepsilon} = \{w \mid M_w$ akz. x nicht$\}$
$HP = \{w\#x \mid M_w$ hält auf $x\}$	$\overline{HP} = \{w\#x \mid M_w$ hält nicht auf $x\}$
$HP_\varepsilon = \{w \mid M_w$ hält auf $\varepsilon\}$	$\overline{H_\varepsilon} = \{w\#x \mid M_w$ hält nicht auf $\varepsilon\}$

Welche davon sind semi-entscheidbar, welche nicht?

Problem	semi-entsch.	co-semi-entsch.
$ACCEPT_{(\varepsilon)}$	✓	✗
$\overline{ACCEPT_{(\varepsilon)}}$	✗	✓
$HP_{(\varepsilon)}$	✓	✗
$\overline{HP_{(\varepsilon)}}$	✗	✓

Betrachte noch ein Problem:

> <u>Emptiness</u>
>
> Gegeben: TM M
>
> Frage: Hält M auf gar keiner Eingabe?

Als Sprache:

$$\text{EMPTINESS} = \{w \mid M_w \text{ hält nie}\}$$

$$\overline{\text{EMPTINESS}} = \{w \mid \text{Es gibt } x \in \{0,1\}^*, \text{ sodass } M_w \text{ auf } x \text{ hält}\}$$

3. Zeige: EMPTINESS ist co-semi-entscheidbar.

4. Zeige: EMPTINESS ist nicht semi-entscheibar.

1. $\overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon} \leq \text{TOTALITY}$

Da $\overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon}$ nicht semi-entscheidbar ist, kann dann auch TOTALITY nicht semi-entscheidbar sein.

Suche nun totale, berechenbare Funktion f, sodass

$$M_w \text{ akz. nicht } \varepsilon \Leftrightarrow M_{w'} \text{ hält immer.}$$

Das Problem: Akz. M_w ε nicht, kann es passieren, dass M_w nicht terminiert!

Betrachte $\overline{\text{ACCEPT}_\varepsilon}$ etwas anders für ein w:

$$\forall i \in \mathbb{N}: M_w \text{ akz. } \varepsilon \text{ nicht nach } i \text{ Schritten.}$$

Frage: können wir dieses i in $M_{w'}$ codieren?

schwierig, denn es gibt unendlich viele is.

Aber! Für $\cancel{x} \in \Sigma^*$ ist $|\cancel{x}| \in \mathbb{N}$ und $\forall i \in \mathbb{N}\ \exists \cancel{x} \in \Sigma^*$ $|\cancel{x}| = i$

$\Rightarrow$ Nutze Eingabewort, um ~~M_w~~ M_w eine bestimmte Anzahl Schritte zu simulieren!

Also ist unsere TM $M_{w'}$ wie folgt:

1. ~~[illegible]~~ Berechne $i = |x|$
2. Simuliere M_w auf ε für i Schritte
3. Falls M_w akzeptiert hat, gehen in eine Endlosschleife
4. Ansonsten: halte.

~~Annahme~~:

$w \notin \overline{HP_\varepsilon}$, d.h. M_w akzeptiert ε nach k vielen Schritten.

Dann wird $M_{w'}$ in eine Endlosschleife für Wörter aus $\Sigma^{\geq k}$ laufen. Also ist $w'=f(w) \notin TOTALITY$.

Andersherum:

$w' \notin TOTALITY$, dann kann $M_{w'}$ nur in eine Endlosschleife geraten, wenn für ein Wort $x \in \Sigma^*$ die Simulation von M_w auf ε nach $|x|$ Schritten akzeptiert.

Also ist $w \notin \overline{HP_\varepsilon}$.

2) Bspw $HP \leq$ Totality

HP ist nicht co-semi-entscheidbar. Damit wäre auch TOTALITY nicht co-semi-entscheidbar.

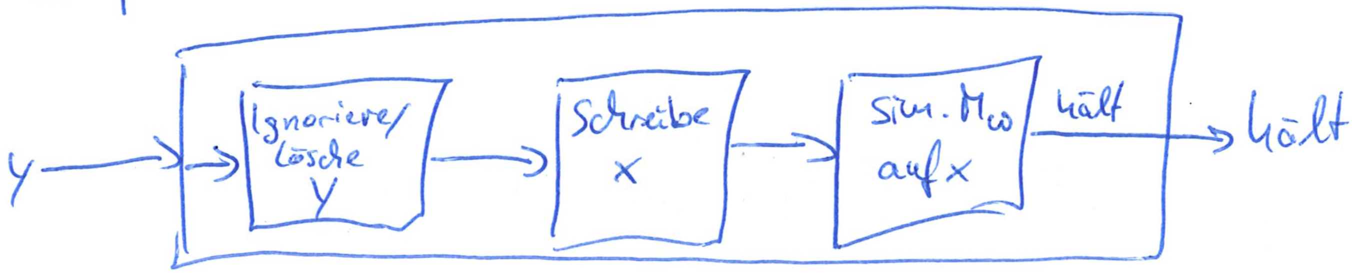
Suche nun totale, berechenbare Fkt. $f: \omega \# x \mapsto \omega'$ mit

$$M_\omega \text{ hält auf } x \iff M_{\omega'} \text{ hält immer}$$

Wir konstruieren $M_{\omega'}$ wie folgt.

1. Ignoriere den Input
2. Schreibe x auf das Eingabeband
3. Simuliere M_ω auf x.

Graphisch



Diese Maschine kann wieder leicht aus $\omega \# x$ erzeugt werden (Argumentation wie im Skript)

Ist $\omega \# x \in HP$, dann hält M_ω auf $x \Rightarrow M_{\omega'}$ hält bei jedem Input $\Rightarrow \omega' \in$ TOTALITY

Ist $\omega' \in$ TOTALITY, muss die Simulation M_ω auf x zwangsweise halten $\Rightarrow \omega \# x \in HP$. $\square$

3) EMPTINESS ist co-semi-entscheidbar.

D.h. wir können eine TM konstruieren, die abweist, falls es ein Wort x existiert, auf welchem M_w hält. Falls es kein x gibt loopen wir unendlich lange

Bekannte Idee: Lasse eine endliche Menge von Wörtern für endlich viele Simulationsschritte laufen. Nimm danach weiter Wörter mit mehr Schritten auf.

Eingabe w

Frage: hält w nie?

for $i = 0, 1, 2, \ldots$ do

    for $x \in \{0,1\}^{\leq i}$ do

        Simuliere M_w auf x mit höchsten i Schritten

        Falls M_w auf x nach i Schritten hält (also akz. oder abweist)

            return 0

Wichtig: Nur die äußere Schleife besitzt unendlich viele Iterationen. Jede. It. besitz nur endlich viele Wörter und damit benötigt sie nur endl. viel Zeit. □

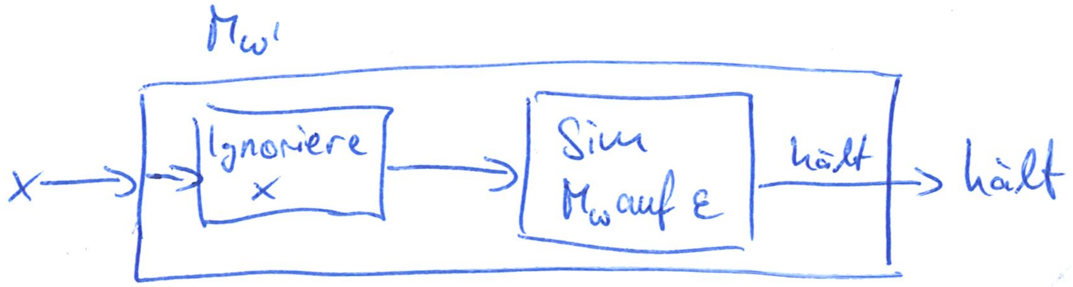
4) $\overline{HP_\varepsilon} \leq$ EMPTINESS

Da $\overline{HP_\varepsilon}$ nicht semi-entscheidbar ist, kann dann auch EMPTINESS nicht semi-entscheidbar sein.

Suche totale, berechenbare Funktion $f: w \mapsto w'$, sodass

$$M_w \text{ hält nicht auf } \varepsilon \iff M_{w'} \text{ hält nie.}$$

$M_{w'}$ braucht also nur M_w auf ε simulieren und ignoriert eigenen Input.
Graphisch



Hält M_w auf ε, so hält $M_{w'}$ nach Konstruktion auf bel. x, also $w \notin \overline{HP_\varepsilon} \Rightarrow w' \notin$ EMPTINESS

Hält $M_{w'}$, muss auch M_w auf ε gehalten haben, also
$w' \notin$ EMPTINESS $\Rightarrow w \notin \overline{HP_\varepsilon}$.

$\square$