

## Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 07.07.2025 um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmetik.

### Pflichtaufgabe 1 (Modulo):

(2+1 Punkte)

Gegeben seien drei positive, ganze Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $n \geq m$ , sowie  $r \in \{0, \dots, m-1\}$ . Wir identifizieren dazu das Problem:

**MOD:** Ist  $n \bmod m = r$ ?

- Zeige: MOD kann mit Speicherbedarf  $O(\log n + \log m)$  gelöst werden.
- Warum folgt aus der Aussage in a) nicht  $\text{MOD} \in L$ ?

### Pflichtaufgabe 2 (Klasse NL):

(6 Punkte)

Betrachte das Problem *sut*-Path:

**Gegeben:** Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  und drei Knoten  $s, u, t \in V$ .

**Frage:** Gibt es einen Pfad von  $s$  nach  $u$ , sowie  $u$  nach  $t$ ?

- Zeige: *sut*-Path  $\leq_m^{\log}$  PATH
- Zeige: PATH  $\leq_m^{\log}$  *sut*-Path

### Pflichtaufgabe 3 (NP):

(3+2+6 Punkte)

Betrachte folgende zwei Probleme für einen gegebenen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  und eine gegebene Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .

**Independent Set (IS)** Existiert eine Menge  $U \subseteq V$  und  $|U| = k$ , sodass  $\forall v, w \in U : \{v, w\} \notin E$  gilt?

**Vertex Cover (VC)** Existiert eine Menge  $C \subseteq V$  und  $|C| = k$ , sodass  $\forall \{v, w\} \in E : v \in C \vee w \in C$  gilt?

- Zeige: Beide Probleme liegen in NP.
- Zeige: Ein Graph  $G$  mit  $n$  Knoten besitzt genau dann ein Vertex Cover der Größe  $k \in \mathbb{N}$ , wenn  $G$  ein Independent Set der Größe  $n - k$  besitzt.
- Zeige: 3SAT  $\leq_m^{\text{poly}}$  VC.