Abgabe: 23.06.2025
Besprechung: ab 01.07.2025

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 23.06.2025 um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Satz von Rice): **(5 Punkte)**
Wende den Satz von Rice auf folgende Sprachen an, um (Un-)Entscheidbarkeit zu beweisen. Prüfe bei Unentscheidbarkeit außerdem, ob die Eigenschaft nicht-monoton ist.

a) $\mathcal{L}_1 = \{w \mid \mathcal{L}(M_w) \leq HP\}$

b) $\mathcal{L}_2 = \{w \mid \mathcal{L}(M_w) \text{ ist nicht entscheidbar}\}$

Pflichtaufgabe 2 (d-PCP): **(2+2 Punkte)**
Betrachte das folgende Problem:

Gegeben: Tupel $(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,d}), \ldots (a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,d})$.

Frage: Existiert eine Sequenz von Zahlen $i_1, \ldots, i_n$, sodass

$$a_{i_1,s} \ldots a_{i_n,s} = a_{i_1,t} \ldots a_{i_n,t}$$

für alle $s \neq t \in \{1, \ldots, d\}$ gilt?

a) Zeige: d-PCP ist für jedes $d \geq 2$ semi-entscheidbar.

b) Zeige: d-PCP ist für jedes $d \geq 2$ unentscheidbar.

(Hinweis: Für $d = 2$ wurden die Aussagen bereits in der Vorlesung bewiesen.)

Pflichtaufgabe 3 (Asymptotisches Wachstum): **(3 Punkte)**
Sortiere die folgenden Klassen vollständig nach Inklusion. Identifiziere dabei auch identische Klassen. Eine Begründung ist dabei nicht notwendig.

- $O(n)$
- $O(n!)$
- $O(1)$
- $O(n + \log n)$
- $O(3^n)$
- $O(n \log n)$
- $O(n^2)$
- $O(2025)$
- $O(n^2 + n \log n)$
- $O(2^n)$
- $O(\log n)$
- $O(n^{\log n})$

Pflichtaufgabe 4 (Zähler): **(3 Punkte)**
Zeige: Einen bei 0 initialisierten Binärzähler n-Mal um den Wert 1 zu erhöhen benötigt $O(n)$ Zeit.

Pflichtaufgabe 5 (Klammerung): **(5 Punkte)**
Betrachte die Sprache $\mathcal{L}_{()} = \{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ ist ein korrekt geklammerter Ausdruck}\}$. Dabei ist w ein korrekt geklammerter Ausdruck wenn:

- Für jedes Präfix u von w ist die Anzahl öffnender Klammern mind. so groß wie die Anzahl schließender Klammern.
- Die Anzahl an öffnenden und schließenden Klammern in w sind gleich groß.

Zeige: $\mathcal{L}_{()} \in \mathrm{DSPACE}(O(\log(n)))$, sowie $\mathcal{L}_{()} \in \mathrm{DTIME}_2(O(n \log n))$, wobei n die Länge des eingegebenen Wortes ist.