Theoretische Informatik 2 **Sommer 2025**

Dr. Arne Schmidt **Abgabe:** 02.06.2025

Besprechung: ab 18.06.2025

Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 02.06.2025 um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Unentscheidbarkeit): **(4+4 Punkte)**

Sei $\mathcal{L} = \left\{ w_1\#w_2 \in \{0,1\}^*\#\{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_{w_2}) \not\subseteq \overline{\mathcal{L}(M_{w_1})} \right\}$. Dabei ist für eine Sprache $\mathcal{L}'$ das Komplement $\overline{\mathcal{L}'} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}'$.

a) Zeige: $\mathcal{L}$ ist semi-entscheidbar.

b) Zeige ohne Verwendung des Satzes von Rice: $\mathcal{L}$ ist nicht entscheidbar.

Pflichtaufgabe 2 (PCP-Varianten): **(2+2+2 Punkte)**

Betrachte Abwandlungen des PCP.

a) Im `Unary PCP` sind Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ gegeben mit $x_i, y_i \in \{1\}^*$. Gibt es eine endliche Sequenz $i_1, \ldots, i_n$ mit $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_n}$?

   Zeige oder widerlege: `Unary PCP` ist unentscheidbar.

b) Im $\texttt{PCP}_{\geq k}$ sind Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*. Gibt es eine endliche Sequenz $i_1, \ldots, i_n$ mit $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_n}$ und $n \geq k$.

   Zeige oder widerlege: $\texttt{PCP}_{\geq k}$ ist unentscheidbar.

c) Im `Last-PCP` sind Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ über Σ^*. Gibt es eine endliche Sequenz $i_1, \ldots, i_n$ mit $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_n}$ und $i_n = m$.

   Zeige oder widerlege: `Last-PCP` ist unentscheidbar.

Pflichtaufgabe 3 (Satz von Rice): **(6 Punkte)**

Beweise mit dem Satz von Rice, ob folgende Sprachen unentscheidbar sind. Begründe dazu, ob die Eigenschaft trivial (durch eine formale Begründung) oder nicht-trivial (durch Angabe einer positiven und negativen Sprache) ist. Begründe mit Hilfe einer positiven und sprach-äquivalenten negativen Turing-Maschine, falls der Satz nicht angewendet werden kann.

a) $\mathcal{L}_1 = \{w \mid M_w$ kehrt vor dem Akzeptieren immer zum linken Ende der Eingabe zurück.$\}$

b) $\mathcal{L}_2 = \{w \mid M_w$ lehnt jedes Wort mit weniger als 50 Buchstaben ab.$\}$

c) $\mathcal{L}_3 = \{w \mid \forall x \in \{0,1\}^* : x \in \mathcal{L}(M_w) \wedge x^{reverse} \notin \mathcal{L}(M_w)\}$

   Dabei entsteht $x^{reverse} = x_n x_{n-1} \ldots x_1$ durch Umkehrung des Wortes $x = x_1 \ldots x_{n-1}x_n$.