Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 19.05.2025 um 13:00 Uhr in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Turing-Machine): **(2+5 Punkte)**
Betrachte die Turing-Machine $M = (Q, \{a, b\}, \{a, b, A, B, ␣\}, \delta, q_0, \{q_F\})$ mit Q und δ wir in Abbildung 1 zu sehen.

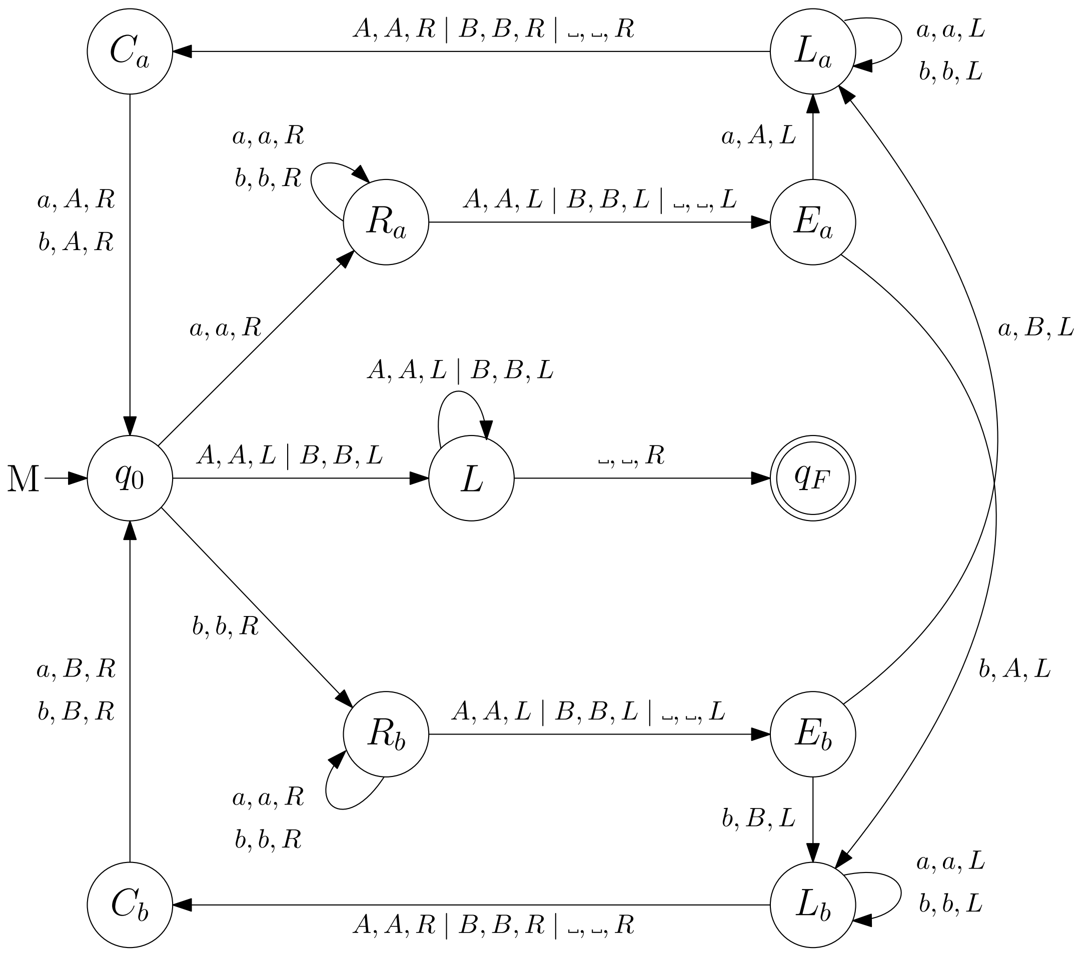

Abbildung 1: Eine Turing-Machine.

a) Führe M mit dem Eingabewort $aaab$ aus. Gib dabei die initiale Konfiguration, sowie jede Konfiguration an, wenn der Zustand q_0 oder q_F erreicht wird.

b) Bestimme die berechnete (partielle) Funktion, sowie eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise. Beschreibe dazu kurz die „Aufgaben“ der einzelnen Zustände.

Pflichtaufgabe 2: **(4 Punkte)**
Seien $K, L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

a) Beweise: $K \cup L$ ist entscheidbar.

b) Beweise: $K \cap L$ ist entscheidbar.

c) Beweise: Die Konkatenation $K.L := \{uw \mid u \in K, w \in L\}$ ist entscheidbar.

Pflichtaufgabe 3 (Überabzählbar unendliche Mengen): **(4 Punkte)**
Zeige: Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{M \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$ ist überabzählbar unendlich. Nutze dazu Cantors Diagonalargument.

Pflichtaufgabe 4 (List Membership): **(5 Punkte)**
Gegeben sei eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine Liste $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ von m Zahlen. Wir wollen entscheiden, ob k in der Liste auftaucht.

Die dazugehörige Sprache kann über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ definiert werden:

$$\mathcal{L} = \{\text{bin}(k)\#\,\text{bin}(n_1)\#\ldots\#\,\text{bin}(n_m) \mid k, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N} \wedge \exists i : k = n_i\}$$

Dabei ist $\text{bin}(\cdot)$ die Binärdarstellung einer Zahl.

Konstruiere formal einen Entscheider für $\mathcal{L}$. Beschreibe dazu zunächst, wie die TM arbeitet (z.B. per Pseudocode) und gib dann eine formale Definition der TM inkl. Zustandsgraphen an. Dabei darf auch eine Mehr-Band-TM genutzt werden.