Technische Universität Braunschweig

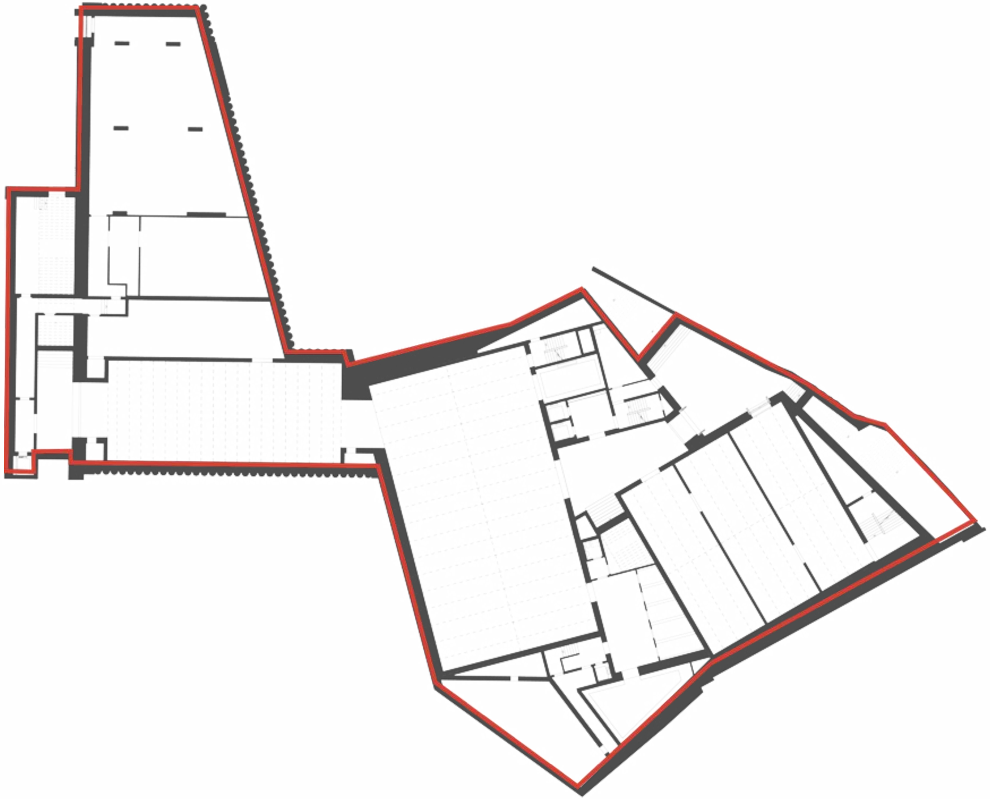
Einführung in algorithmische Geometrie – Art Gallery

Arne Schmidt

Kapitel 4 – Art Gallery


TURE ON THE MOVE
ON THE MOVE SCULPTURE ON THE MOVE
Heuwaage

Abstraktion



Guards

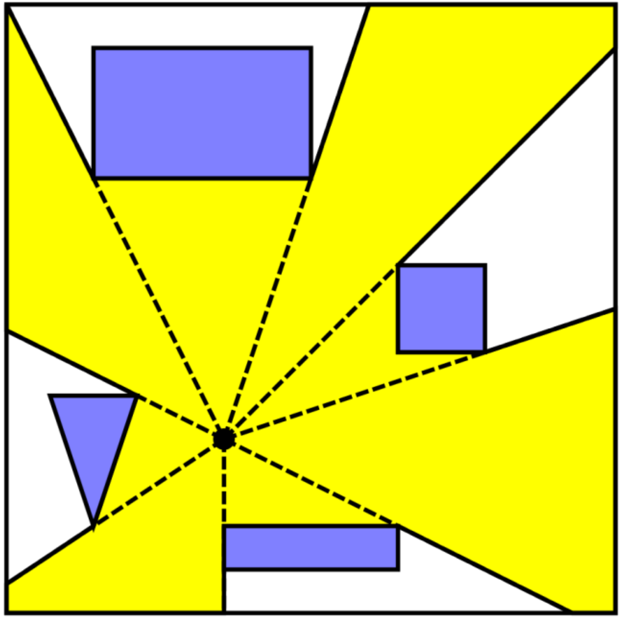
Definition 4.1
Gegeben sei ein Polygon P und ein Punkt $v \in P$.

Das **Visibilitypolygon** $\mathcal{V}_P(v)$ von v ist definiert über alle Punkte $p \in P$, sodass $\overline{vp} \in P$.

Eine Menge $G \subset P$ heißt **Guard-Cover**, wenn

$$\bigcup_{g \in G} \mathcal{V}_P(g) = P$$

Sind alle $g \in G$ Eckpunkte von P, heißt G auch **Vertex-Guard-Cover**.

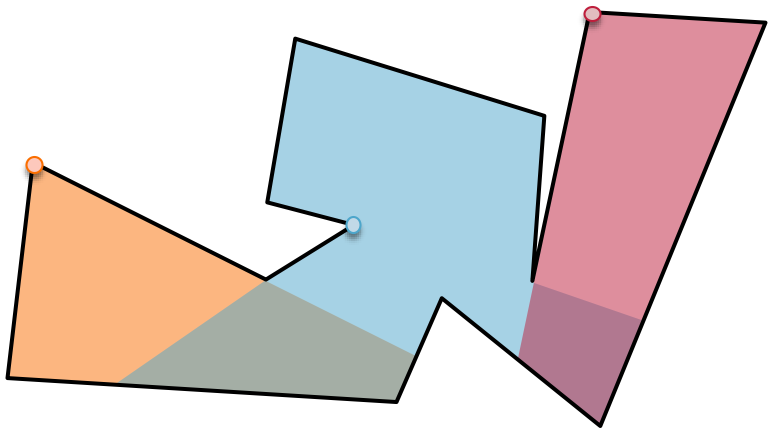


Das Art-Gallery-Problem (AGP)

Problem 4.2
Gegeben: Ein Polygon P und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Exsitert ein (Vertex-)Guard-Cover der Größe k?

Beispiel:
Für $k = 3$ können wir 3 Knoten wählen, sodass alles abgedeckt wird.

Geht es auch für $k = 2$?



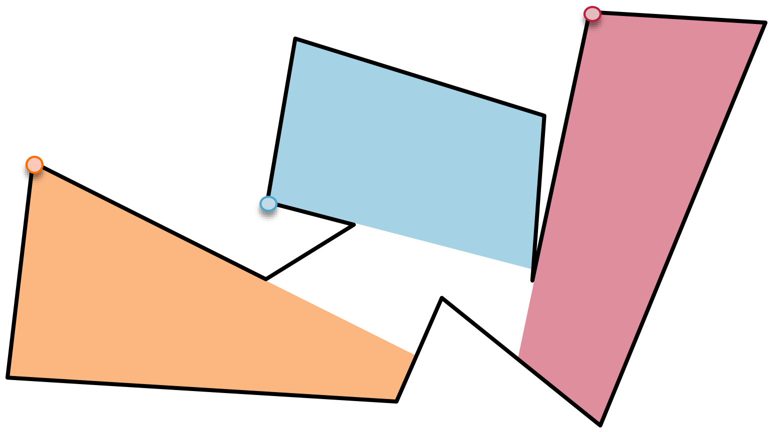
Witness-Sets

Definition 4.3
Gegeben sei ein Polygon P.

Eine Menge $\mathcal{W} \subset P$ heißt **unabhängiges Witness-Set**, wenn für je zwei Punkte $u, w \in W$ gilt

$$\mathcal{V}_P(u) \cap \mathcal{V}_P(w) = \emptyset$$

Korollar 4.4
Besitzt ein Polygon ein unabhängiges Witness-Set der Größe k, dann besitzt jedes (Vertex-)Guard-Cover mindestens k Punkte.

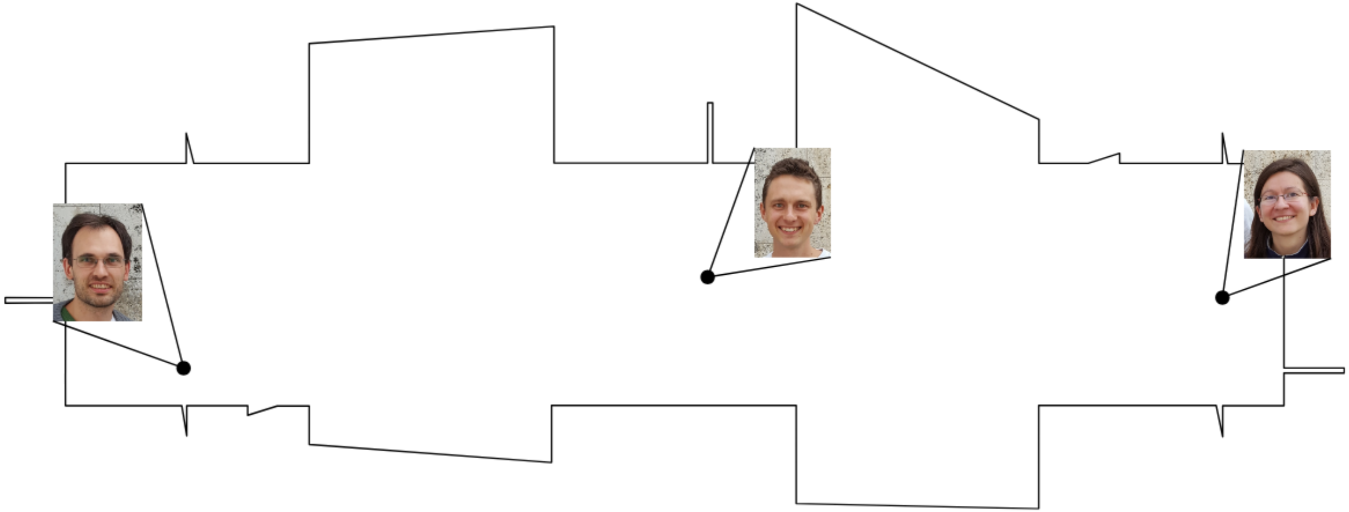


Verschiedene Wächter

Point Guards

Irrational Guards are Sometimes Needed

Mikkel Abrahamsen[1], Anna Adamaszek[1], and Tillmann Miltzow[2]



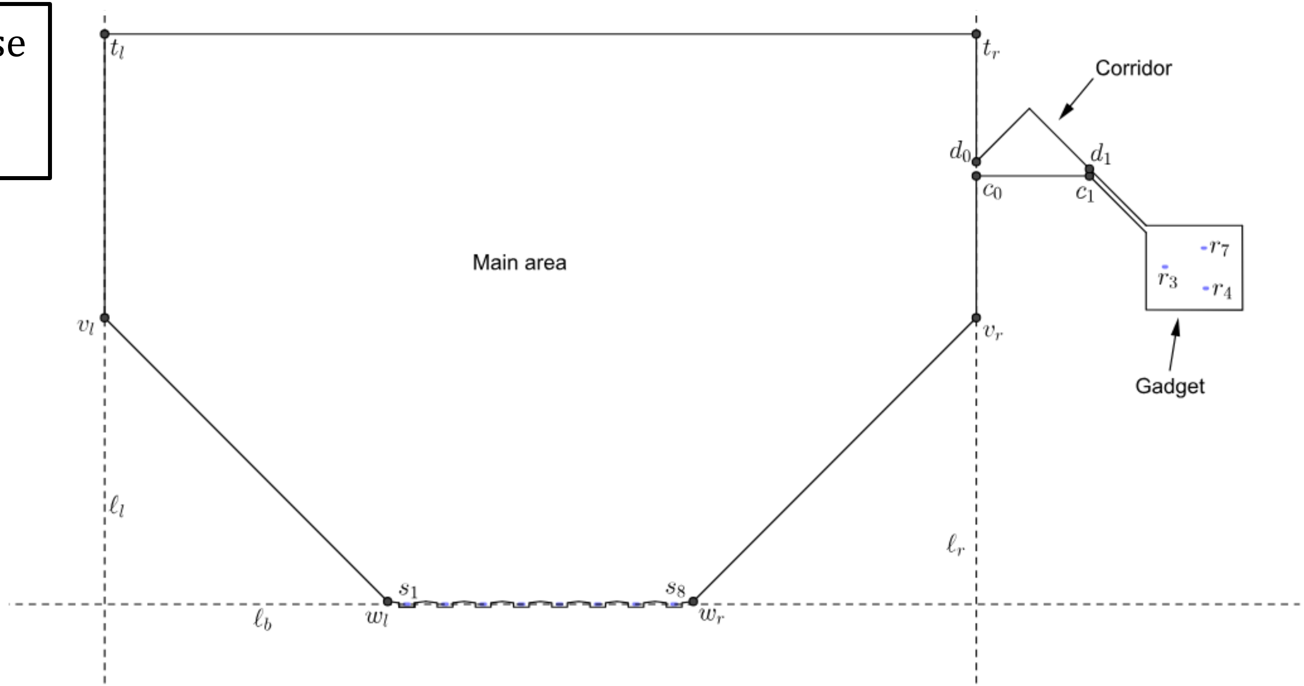
Till, Mikkel, Anna meticulously guarding the polygon: a little irrational, but pretty optimal.

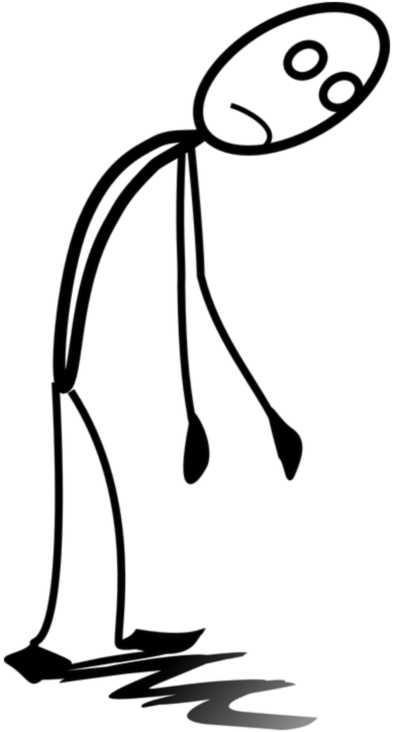
Point Guards

The Art Gallery Problem is ∃ℝ-complete

MIKKEL ABRAHAMSEN and ANNA ADAMASZEK, University of Copenhagen
TILLMANN MILTZOW, Utrecht University

∃ℝ ist eine Komplexitätsklasse irgendwo zwischen NP und PSPACE.





Irrationale Zahlen lassen sich auf dem Computer schwer darstellen.

Schränken wir uns erst mal auf Vertex-Guards ein!

Vertex Guards

Theorem 4.5
Das AGP mit Vertex-Guards ist NP-vollständig.

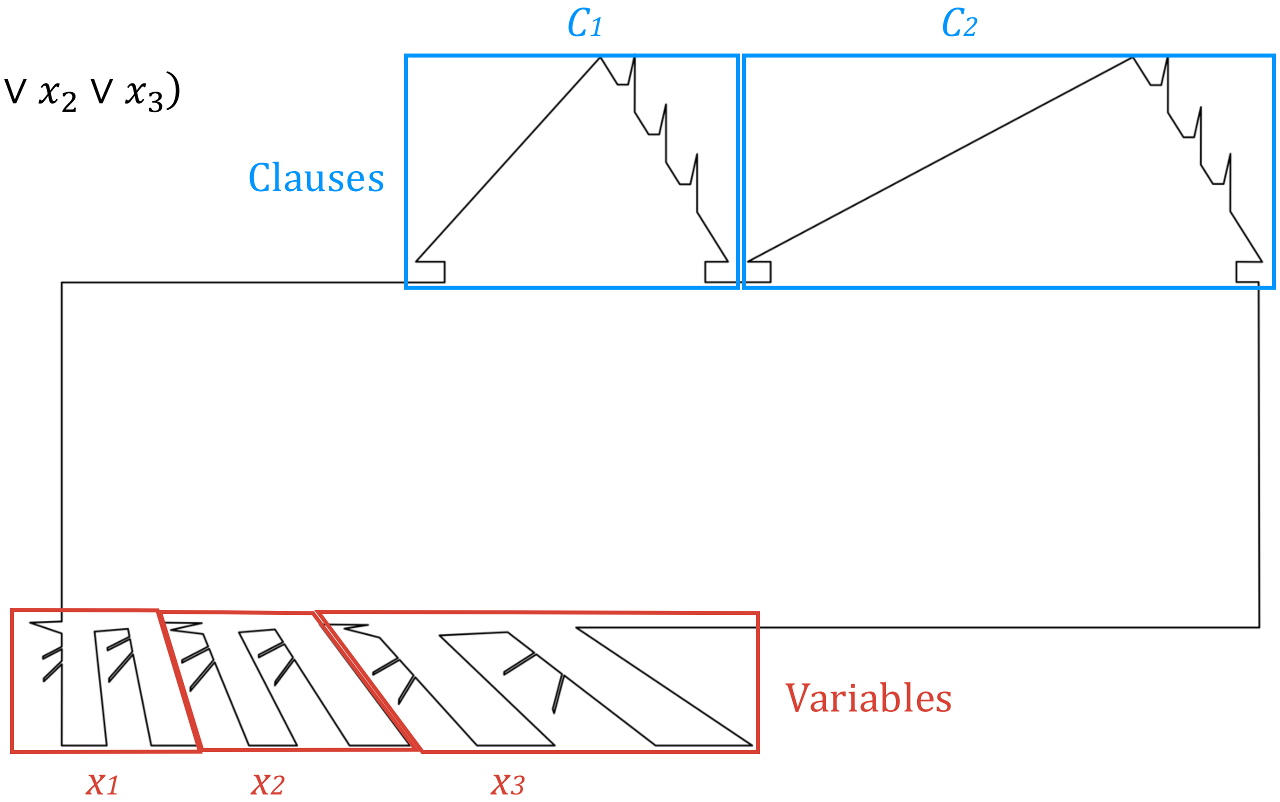
Beweisskizze:
Reduziere von 3SAT auf das AGP.

Gegeben:	Eine boolesche Formel *F* in 3CNF
Frage:	Existiert eine Variablenbelegung, sodass *F* wahr wird?

3SAT auf AGP – Das Polygon

Beispiel:

$F = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

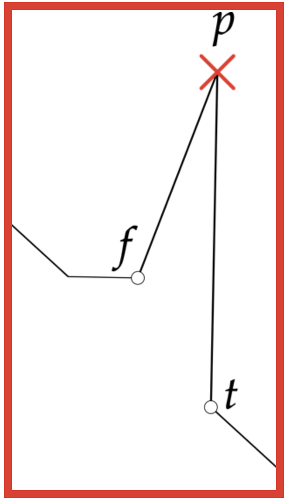


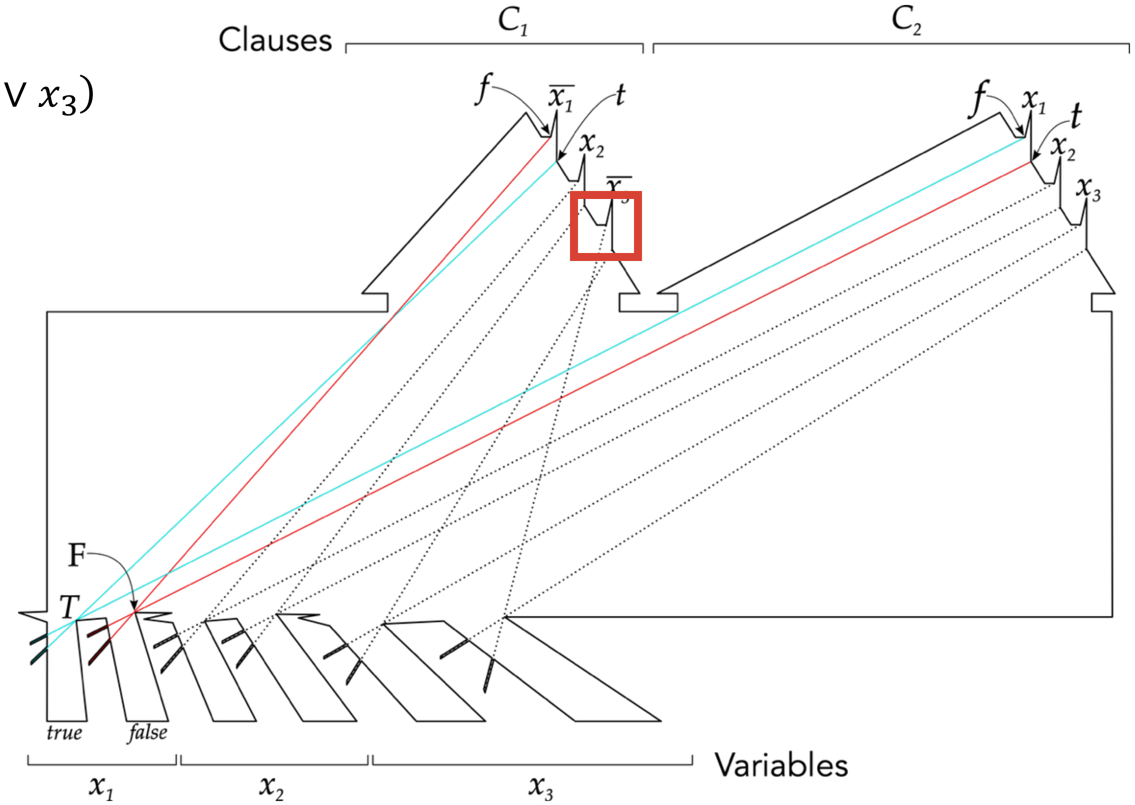
3SAT auf AGP – Das Polygon

Beispiel:

$$F = (\bar{x}_1 \lor x_2 \lor \bar{x}_3) \land (x_1 \lor x_2 \lor x_3)$$

Literal





3SAT auf AGP – Eine erfüllende Belegung

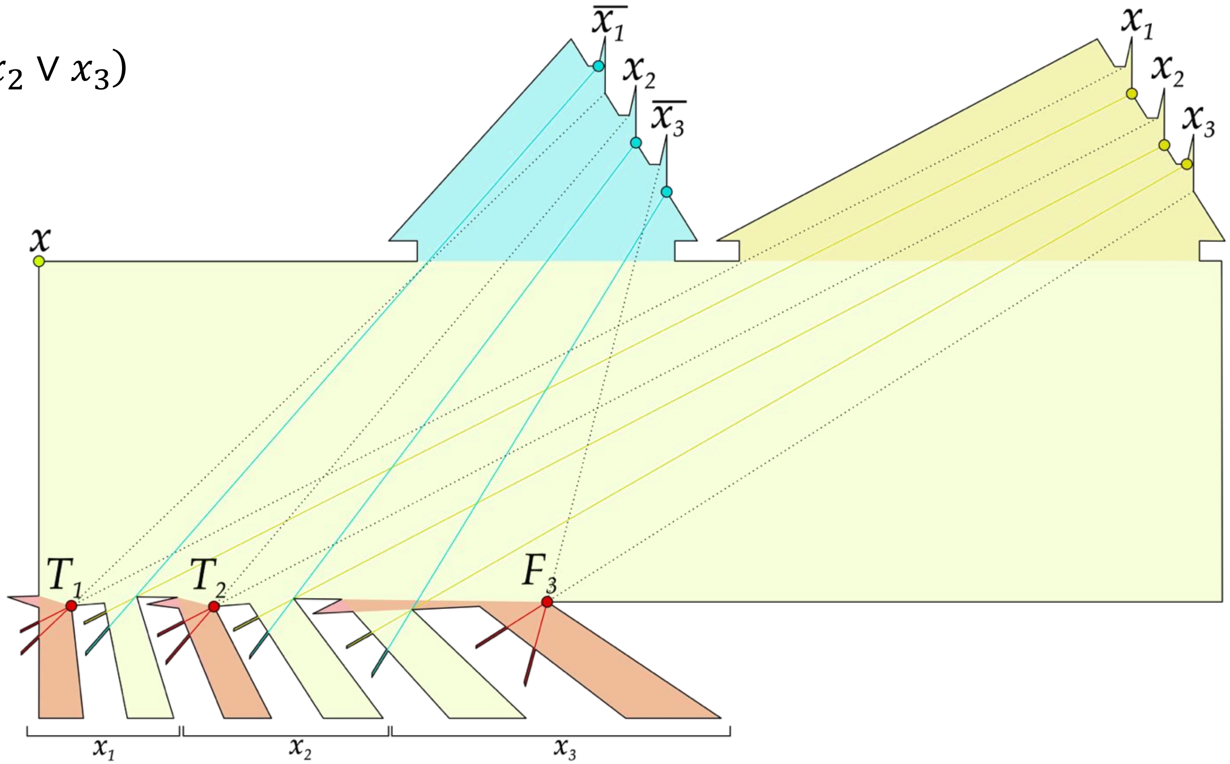
Beispiel:

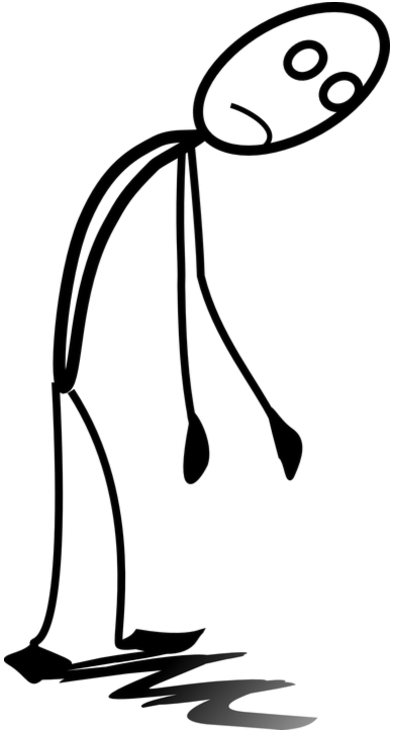
$F = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$x_1 = true$

$x_2 = true$

$x_3 = false$





Also auch für Vertex-Guards vermutlich kein effizienter Algorithmus.

Gibt es für das Problem gute obere Schranken für ein Vertex-Guard-Cover?

Kapitel 4.1 – Schranken

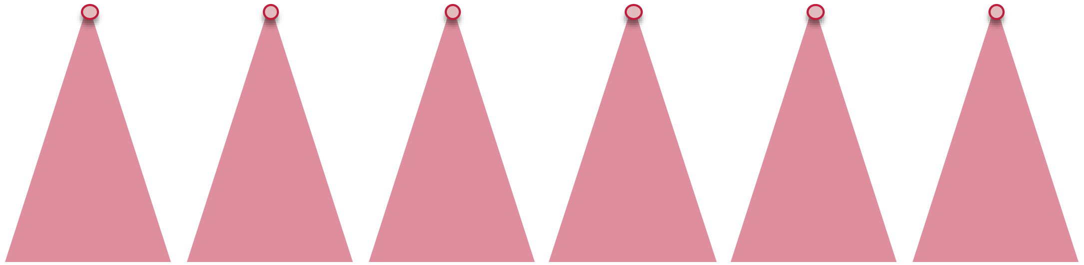
Übliche Art-Gallery-Frage

How many guards are **always sufficient** and **sometimes necessary** to cover an art gallery with n walls?

Manchmal notwendig

Versuche für ein $m \in \mathbb{N}$ ein möglichst kleines Polygon zu finden, welches ein Witness-Set der Größe m besitzt.

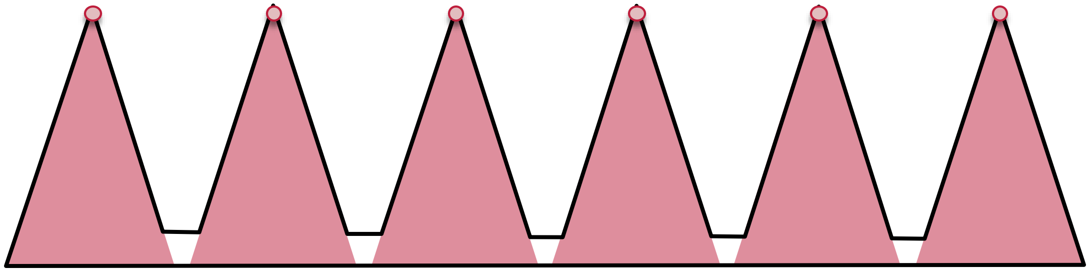
Einfachstes Visibilitypolygon eines Witness: Ein Dreieck!
Idee: Lege m Dreiecke disjunkt nebeneinander.



Manchmal notwendig

Versuche für ein $m \in \mathbb{N}$ ein möglichst kleines Polygon zu finden, welches ein Witness-Set der Größe m besitzt.

Einfachstes Visibilitypolygon eines Witness: Ein Dreieck!
Idee: Lege m Dreiecke disjunkt nebeneinander.
Danach: Verbinde die Dreiecke geschickt!



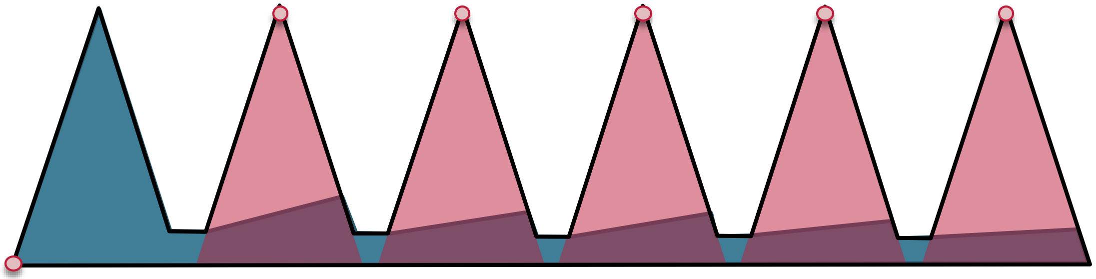
Das Polygon hat $3m$ Knoten und ein Witness-Set der Größe m.

Schranken

Lemma 4.6

Für ein einfaches Polygon mit n Knoten sind manchmal $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ (Vertex-)Guards notwendig.

Im konstruierten Polygon reichen auch die $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter. Reichen so viele immer?



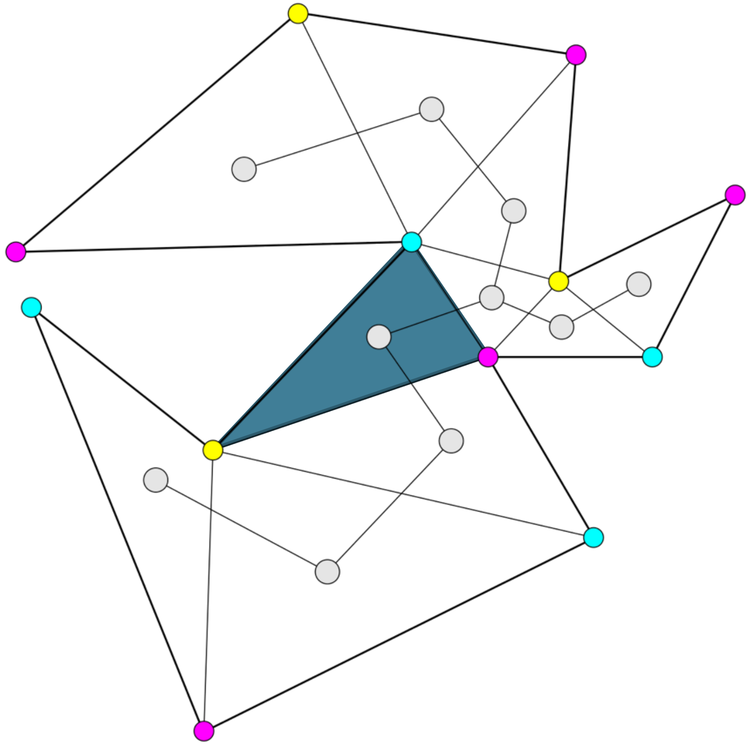
Immer ausreichend

Die Visibilitypolygone von Witnesses sind im Worst-Case Dreiecke.

Idee:
Betrachte eine Triangulation des Polygons und tue so, als ob jedes Dreieck einem Witness gehört.
→ In jedem Dreieck muss mind. ein Knoten gewählt werden.
→ Teile für jedes Dreieck die drei Knoten in drei disjunkte verschiedene Guard-Cover.
Können wir garantieren, dass über alle Dreiecke nur drei verschiedene disjunkte Lösungen betrachtet werden müssen?

Dann wäre jeder Knoten vom Polygon in einem der drei Guard-Cover, d.h. einer dieser Cover muss Größe $\leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ besitzen!

Fisks Beweis



Wähle ein Dreieck und färbe die Knoten beliebg.
Fahre rekursiv auf den Nachbarn fort:

- Zwei Knoten haben bereits eine Farbe.
- Gib dem dritten die fehlende Farbe.
- Fahre mit unbearbeiteten Nachbarn fort.

Achtung: Das funktioniert nur, weil P einfach ist!

Schranken

Lemma 4.6

Für ein einfaches Polygon mit n Knoten sind manchmal $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ (Vertex-)Guards notwendig.

Lemma 4.7

Für ein einfaches Polygon mit n Knoten sind $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Vertex-Guards immer ausreichend.

Ein solches Vertex-Guard-Cover kann in $O(n)$ Zeit gefunden werden.

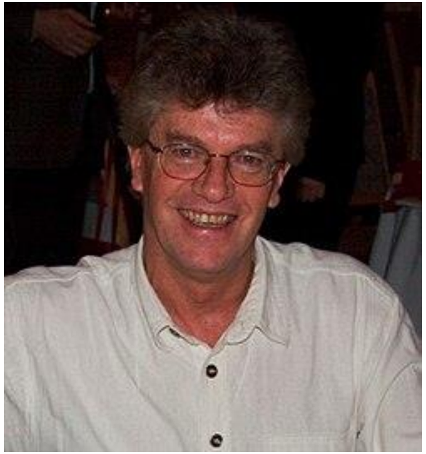
Alles bewachen

Bisher haben wir immer das gesamte Polygon betrachtet.

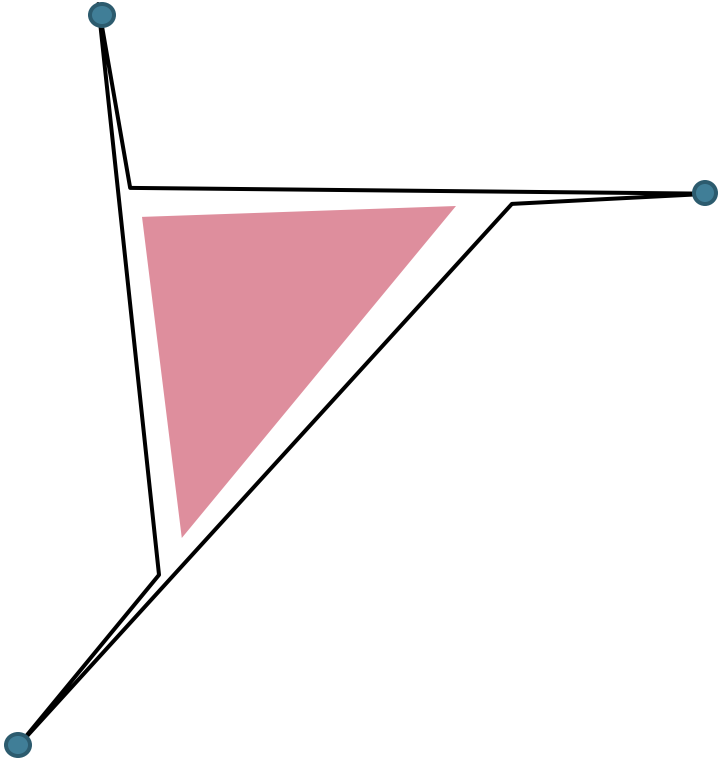
Reicht es nicht den Fall zu betrachten, dass die **Kanten des Polygons bewacht** werden?

Godfried‘s Favorite Polygon

Die Guards auf den Spitzen decken jede Kante ab, aber nicht das gesamte Polygon!

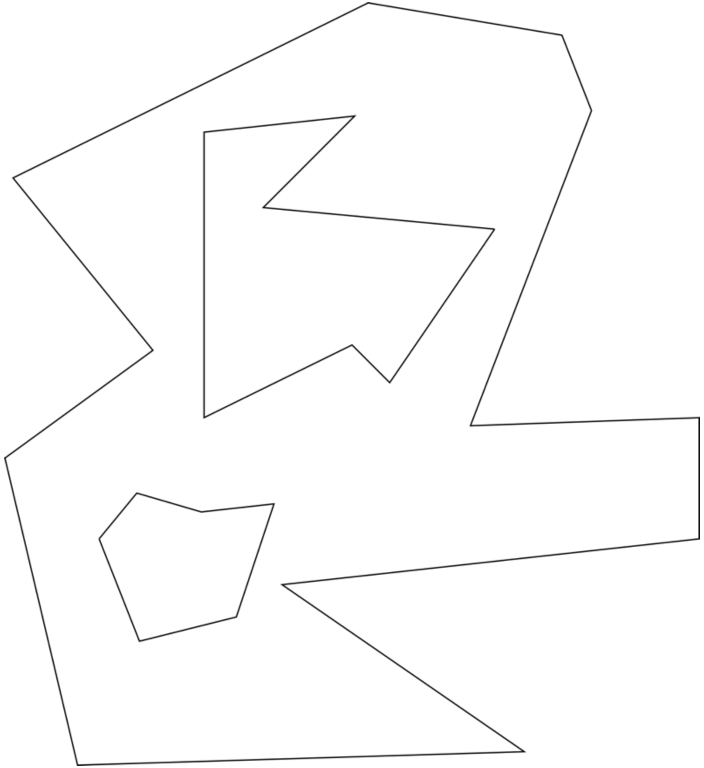


Godfried Toussaint
(1944 – 2019)



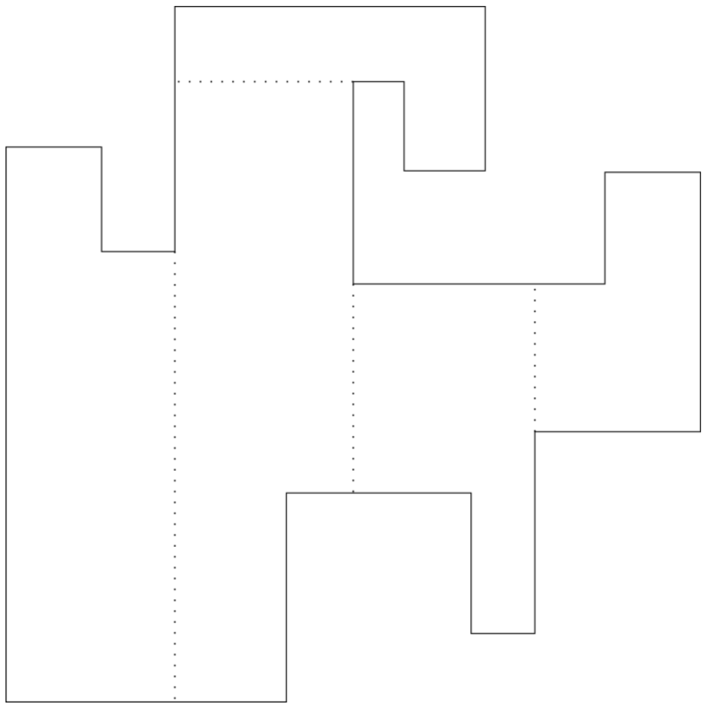
Kapitel 4.2 – Varianten

Polygone mit Löchern



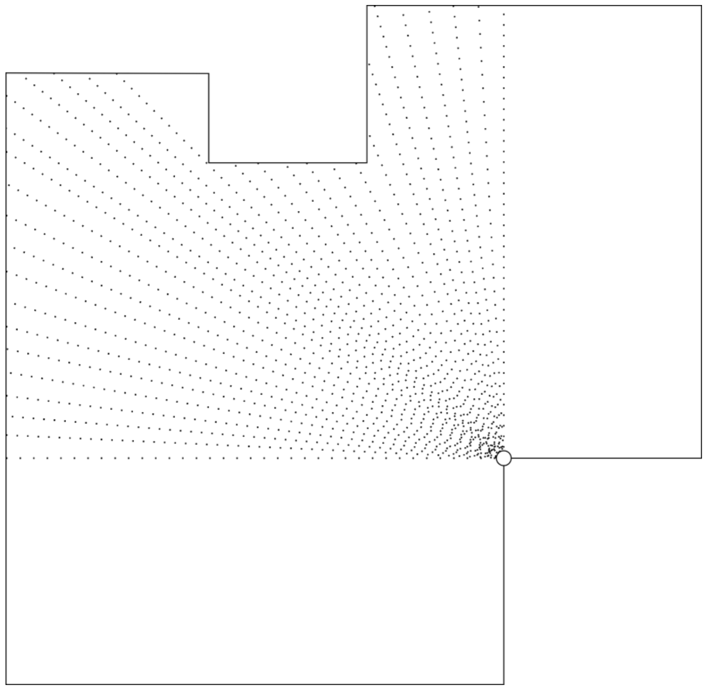
Theorem 4.8
Für ein Polygon mit n Segmenten und h Löchern sind
$\left\lfloor \frac{n+h}{3} \right\rfloor$ Vertex-Guards manchmal notwendig und
$\left\lfloor \frac{n+2h}{3} \right\rfloor$ Vertex-Guards immer ausreichend.

Orthogonale Polygone



Theorem 4.9
Für ein orthogonales, einfaches Polygon mit n Segmenten $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ Vertex-Guards manchmal notwendig und immer ausreichend.

Blickwinkel



Theorem 4.10
Betrachte ein orthogonales, einfaches Polygon P, sowie stationäre Kameras, welche einen Sichtradius von α besitzen.

P kann gecovert werden, wenn $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Wenn $\alpha < \frac{\pi}{2}$, existieren Polygone, die nicht gecovert werden können.

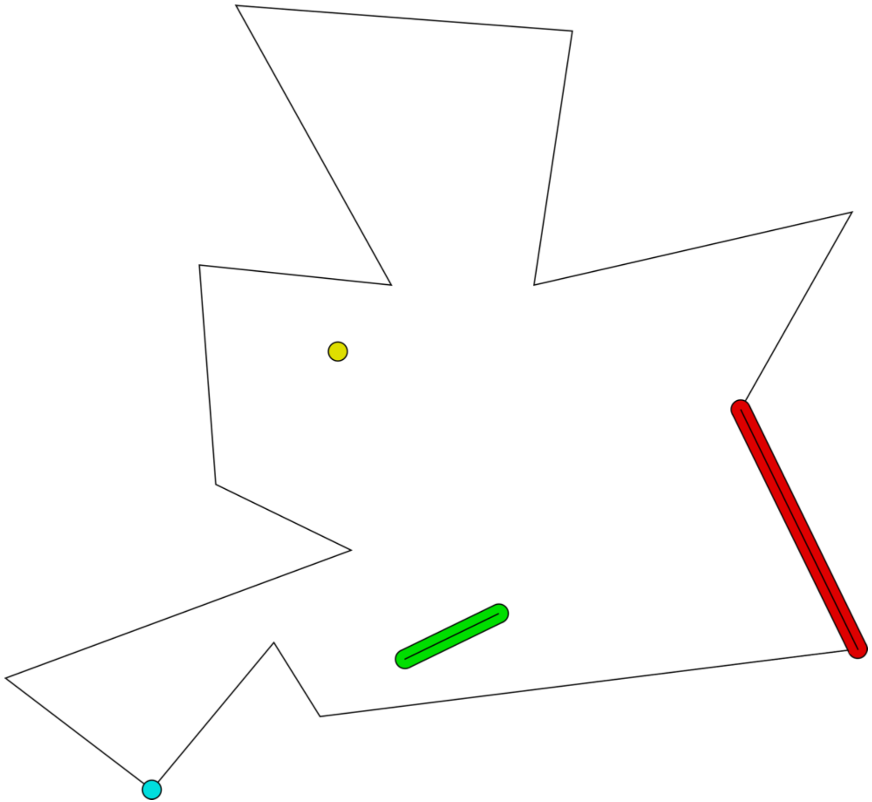
Wächtertypen

Vertex Guards

Point Guards

Edge Guards

Mobile Guards



Nächstes Mal

Wir haben paar
Eigenschaften für AGP.

Aber wie berechnet
man die
Visibilitypolygone?