Einführung in algorithmische Geometrie

Arne Schmidt

Heute

Die Hierarchie von Triangulationen klingt praktisch aufwändig.

Können wir unser Arrangement einfach in Streifen unterteilen?

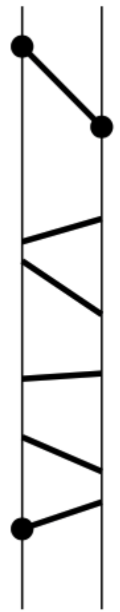
Dann müssten wir nur noch in einem Streifen nach der Fläche suchen...

Punktlokalisierung in einem Streifen

Angenommen, ich betrachte einen Streifen, für den Knoten entweder auf dem Rand, oder außerhalb des Streifens liegen.

→ Segmente innerhalb des Streifens kreuzen sich nicht.
→ Segmente haben eine Ordnung innerhalb des Streifens.
→ Betrachte einen balancierten Suchbaum der Segmente.

Was muss ich für einen Querypunkt tun?
→ Teste wiederholt, ob man über oder unter einem Segment liegt
→ Gibt es kein Segment zum Testen, ist man in einem Blatt: Der gesuchten Fläche.

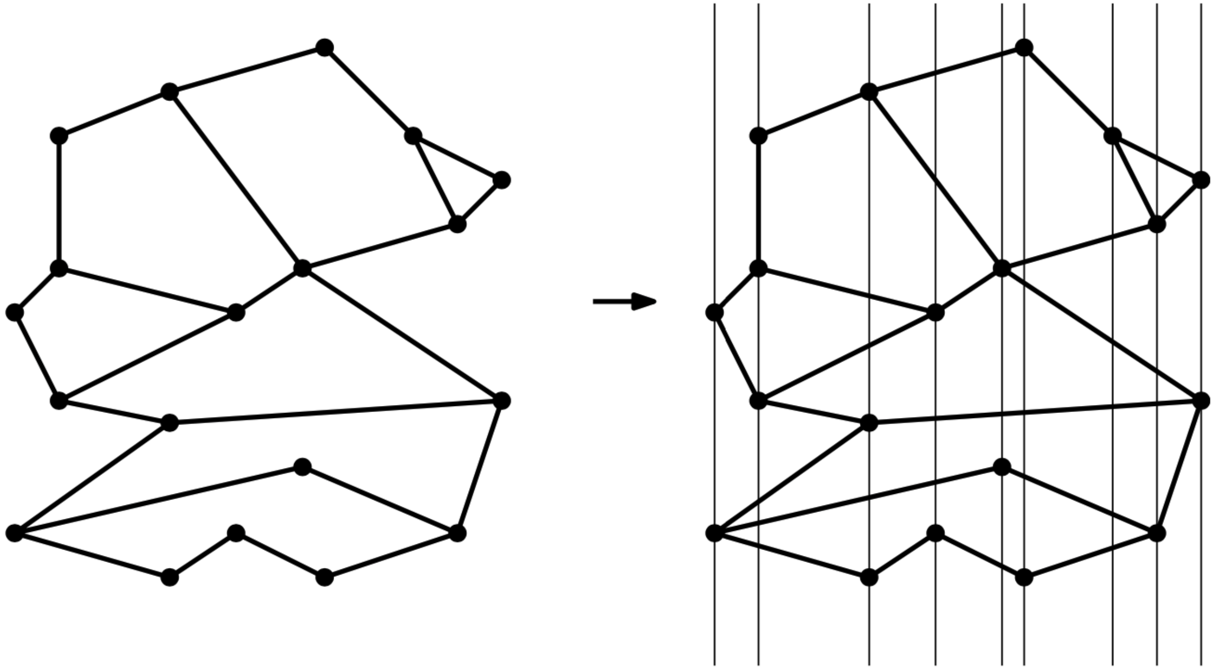


Partitionierung in Streifen

1. Teile alles in Streifen
2. Erstelle einen Suchbaum von Segmenten für jeden Streifen
3. Erstelle einen Suchbaum von Streifen

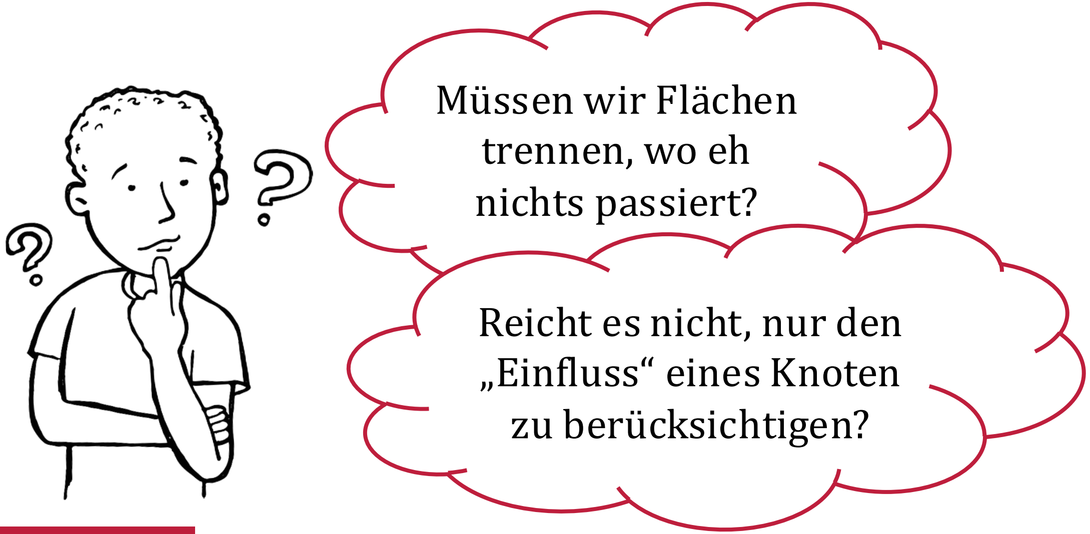
Für einen Querypunkt:

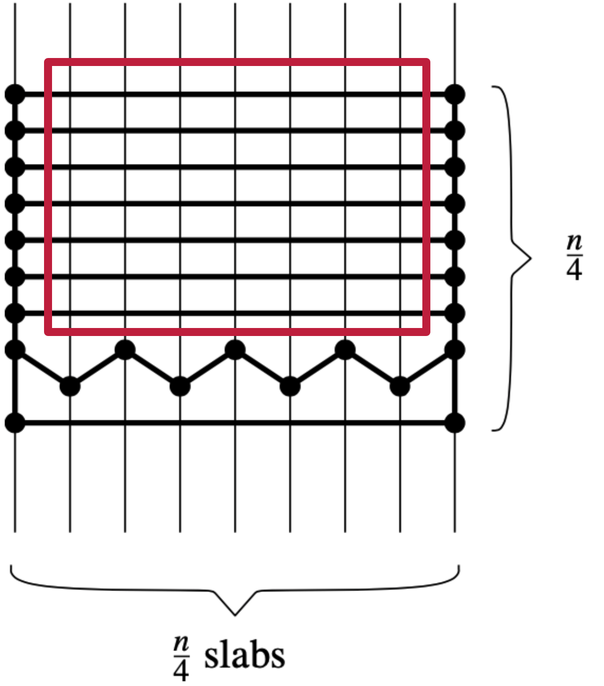
1. Suche korrekten Slab
2. Suche korrektes Face im Slab



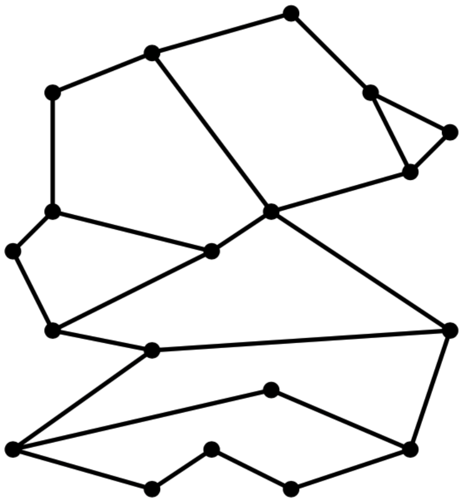
Das Problem mit Streifen

Die zu speichernden Daten sind viele: $O(n^2)$
Damit ist die Laufzeit auch im Worst-Case $\Omega(n^2)$

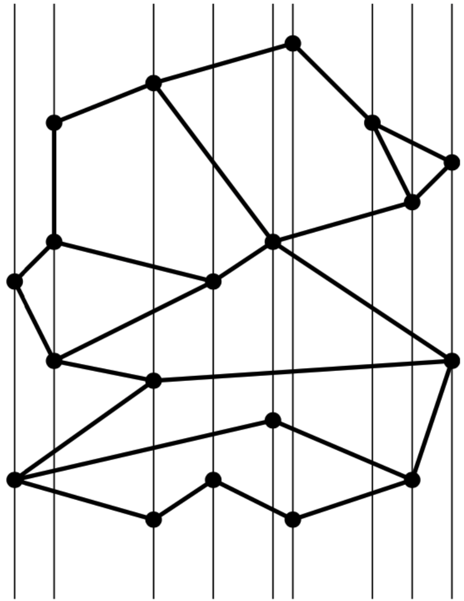




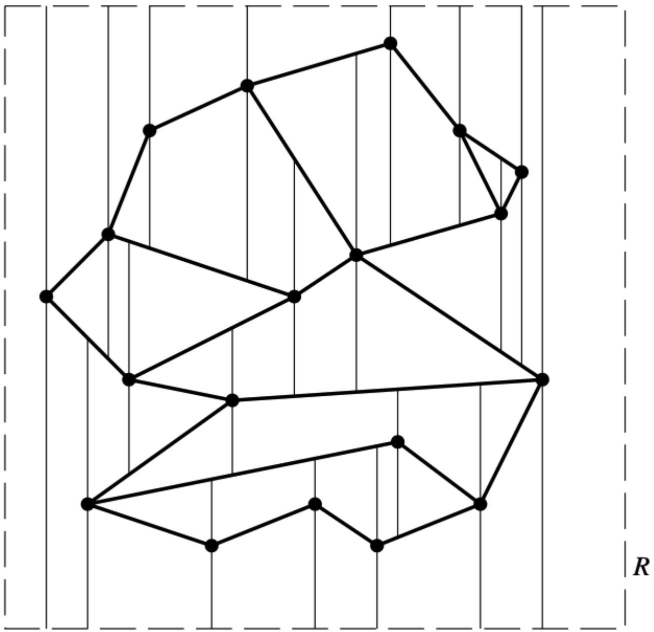
Verschieben von Teillinien



Arrangement



Unterteilung mit Streifen



Bessere Unterteilung?

Kapitel 2.2.6 – Trapezoidal Maps

Definition

Definition 2.37
Sei A ein Arrangement, welches die Facemenge $\mathcal{F}$ besitzt. Ein **Refinement** A' von A ist ein Arrangement, sodass für jedes Face F' in A' ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F' \subseteq F$.

Definition 2.38
Zwei Segmente heißen nicht-schneidend (**non-crossing**), wenn deren Schnitt entweder leer ist oder aus einem gemeinsamen Endpunkt besteht.

Für die nächsten Slides nehmen wir zunächst an:

1. Es gibt ein großes Rechteck R, welches das Arrangement einschließt.
2. Keine zwei Punkte besitzen dieselbe x-Koordinate.

Bei Mengen von solchen nicht-schneidenden Segmenten spricht man auch von **allgemeiner Lage (General Position)**.

Trapezoidal Map

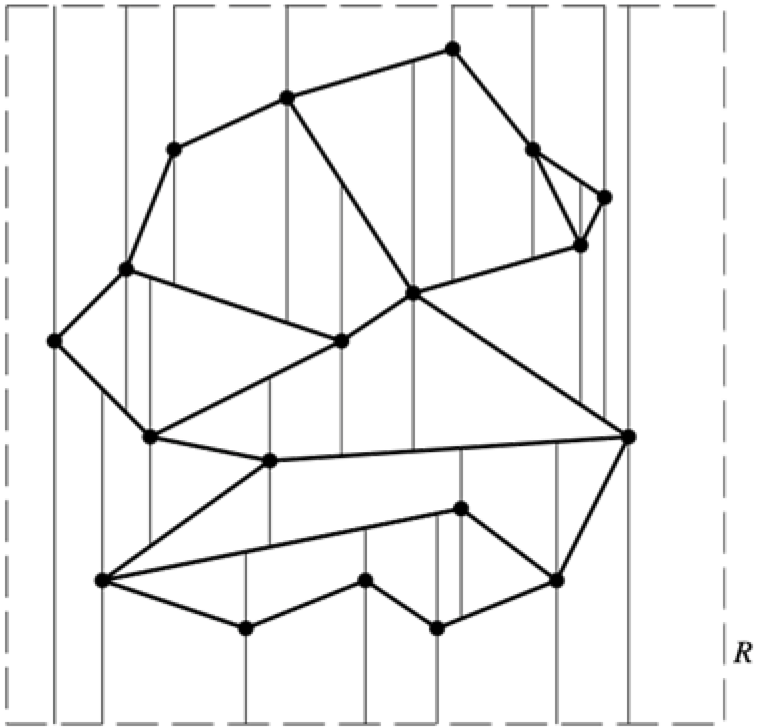
Definition 2.39
Sei S eine Menge von nicht-schneidenen Segmenten in allgemeiner Lage und R ein S umschließendes Rechteck.

Eine **obere vertikale Erweiterung (upper vertical extension)** eines Endpunktes v eines Segments aus S ist eine vertikale Linie beginnend bei v. Sie führt vertikal nach oben bis das erste Segment oder das umschließende Rechteck R getroffen wird.

Analog definieren wir **untere vertikale Erweiterungen (lower vertical extensions)**.

Die **Trapezoidal Map** $\mathcal{T}(S)$ ist das durch Hinzufügen aller oberen und unteren Erweiterungen entstehende Arrangement.

Beispiel



Trapezoidal Map

Nutzen?

Jetzt haben wir ein feineres Arrangement.

Was hilft uns das??

Analysieren wir die Trapezoidal Maps zunächst!

Trapez-Eigenschaft

Lemma 2.40
Jede Fläche einer Trapezoidal Map einer Segmentmenge S in allgemeiner Lage bestitzt eine oder zwei vertikale Seiten und genau zwei nicht-vertikale Seiten.

Beweis:
Zunächst, jede Fläche ist konvex: jede vertikale Erweiterung kann nur Innenwinkel von $< 180°$ erzeugen. Da auch das Rechteck R nur Innenwinkel von 90° besitzt, ist also jedes Face konvex.

Aus der Konvexität folgt direkt, dass jedes Face maximal zwei vertikale Seiten besitzt.

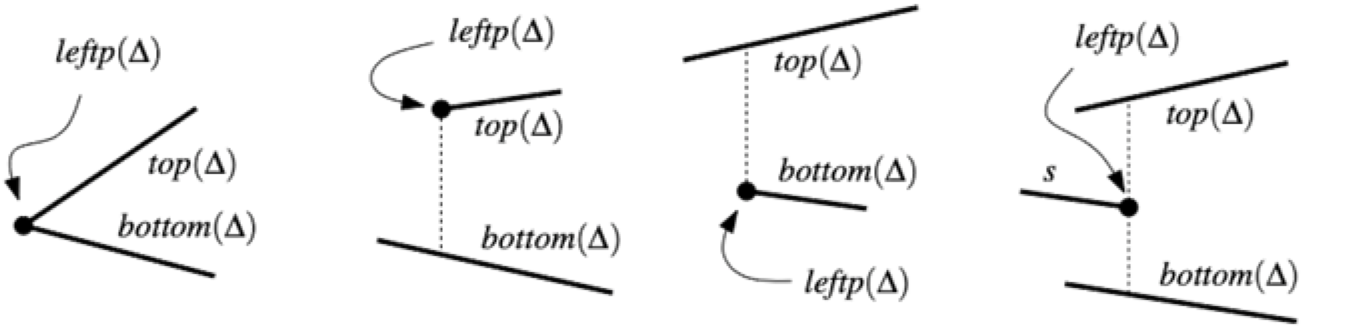
Angenommen, eine Fläche F besitzt mehr als zwei nicht-vertikale Seiten, dann gibt es zwei solcher, die adjazent sind.
Allerdings müsste von deren gemeinsamen Punkt eine vertikale Erweiterung ausgehen.
→ Trapezoidal Map war nicht vollständig.
Da jede Fläche beschränkt ist, muss es mind. zwei nicht-vertikale Seiten geben.

Beschränkende Segmente und Knoten

Definition 2.41
Sei S eine Menge von nicht-schneidenen Segmenten in allgemeiner Lage und sei Δ ein Face in $\mathcal{T}(S)$.

$top(\Delta)$ sei das Segment, welches Δ nach oben begrenzt. Analog sei $bottom(\Delta)$ das Segment, welches Δ nach unten beschränkt.

$leftp(\Delta)$ sei der Knoten, welcher die linken vertikalen Erweiterungen erzeugt. Analog sei $rightp(\Delta)$ der rechte solche Knoten. Für Seiten von R ist dies jeweils der untere Knoten.

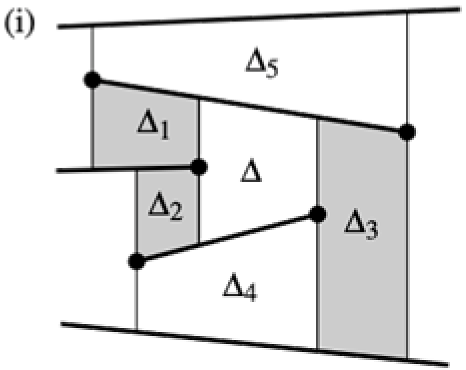


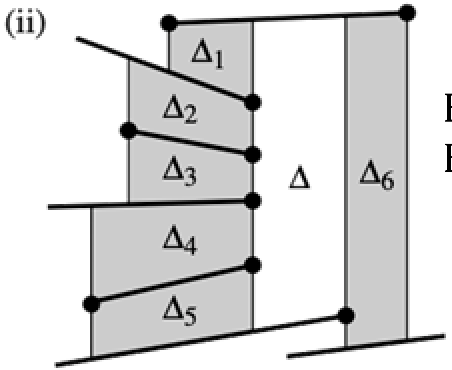
Größe und Adjazenz

Lemma 2.42
Die Trapezoidal Map von n Segmenten in allgemeiner Lage besitzt maximal $6n + 4$ Knoten und maximal $3n + 1$ Trapeze.

Definition 2.43
Zwei Trapeze Δ, Δ' heißen **adjazent**, wenn einen Teil einer vertikalen Kante gemeinsam haben. Ist Δ' links von Δ und teilen sich das obere (untere) Segment, so heißt Δ' der **linke-obere** (-untere) **Nachbar** von Δ. Analog definiert, wenn Δ' der rechte Nachbar ist.

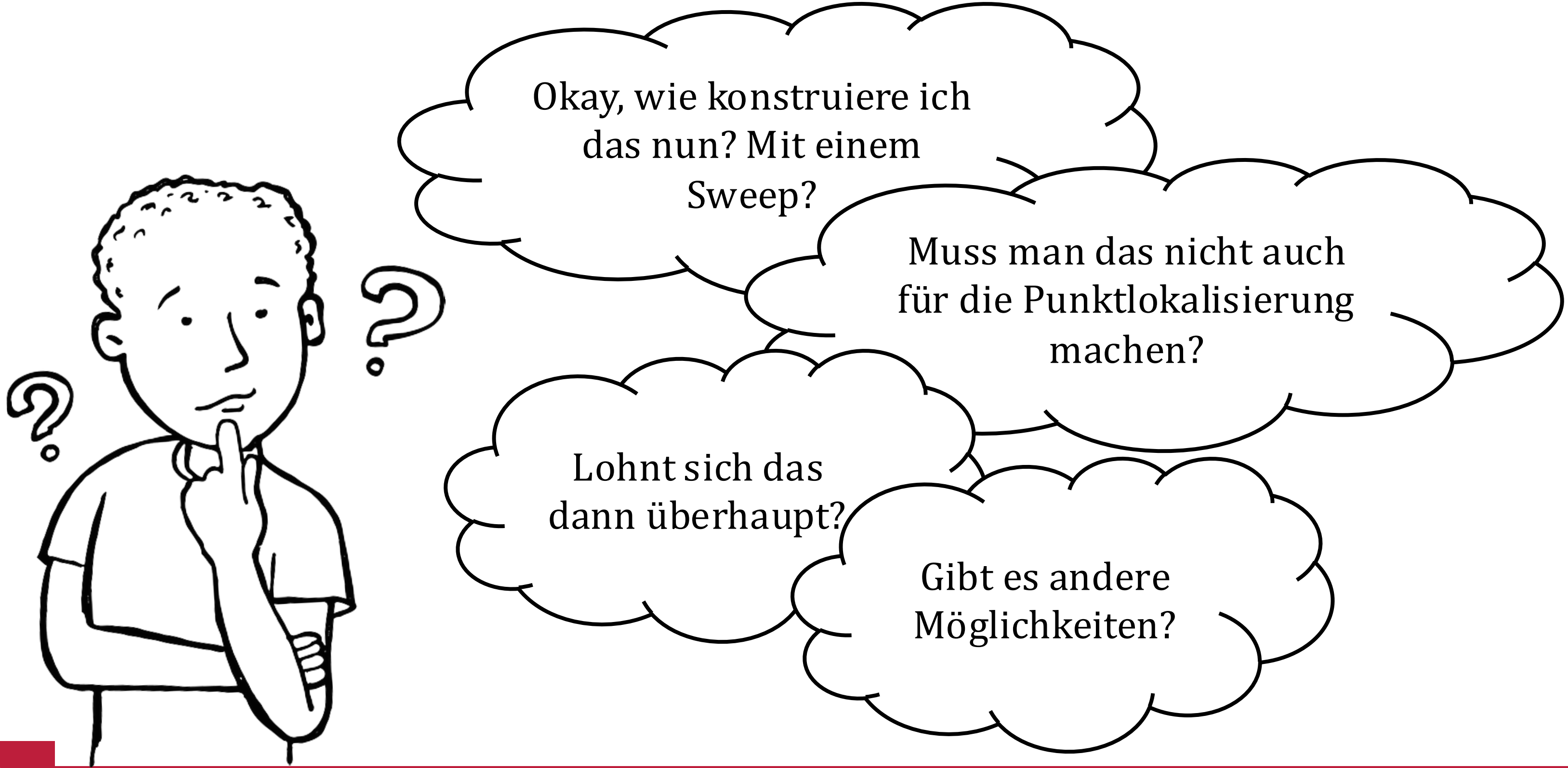
Allgemeine Lage:
4 Nachbarn maximal.



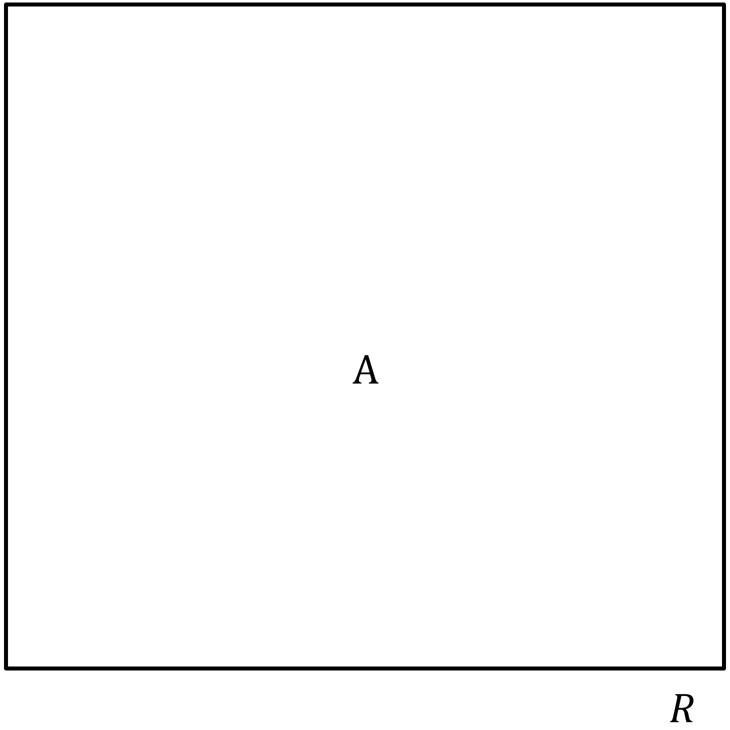


Keine allgemeine Lage:
Beliebig viele Nachbarn.

Konstruktion



Insertion-Methode

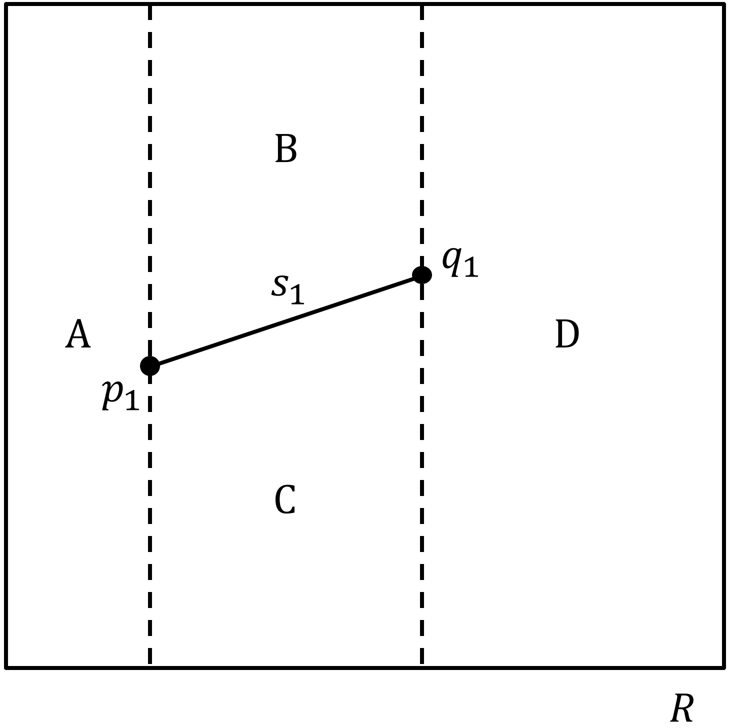


Suchstruktur:

A

Wenn wir ein Segment hinzufügen, was passiert?

Insertion-Methode



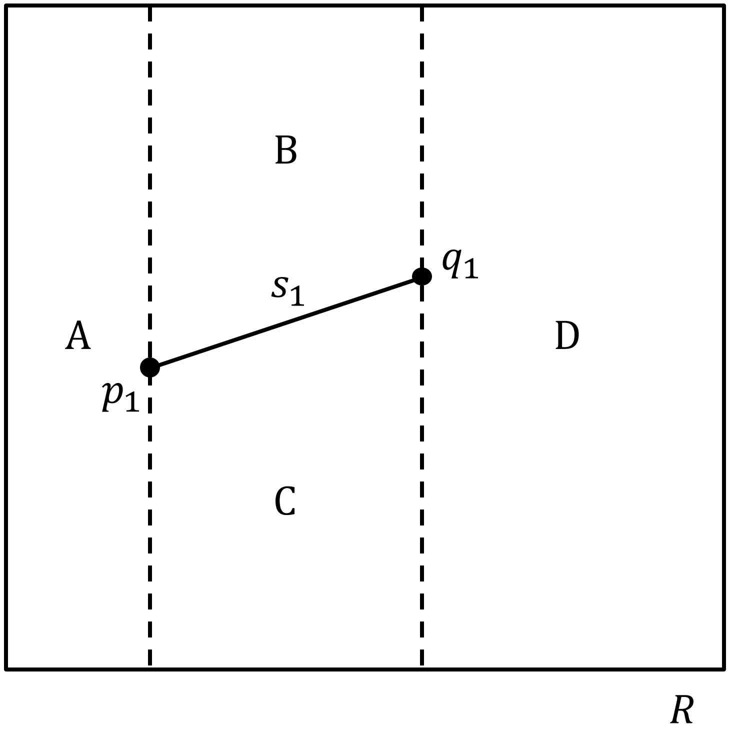
Suchstruktur:

A

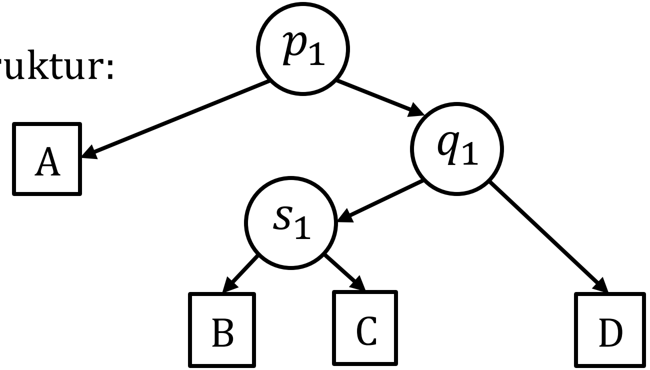
Wenn wir ein Segment hinzufügen, was passiert?
Es entstehen Flächen:

- Links von p_1
- Rechts von q_1
- Zwischen p_1 und q_1, aber unter s_1
- Zwischen p_1 und q_1, aber über s_1

Insertion-Methode



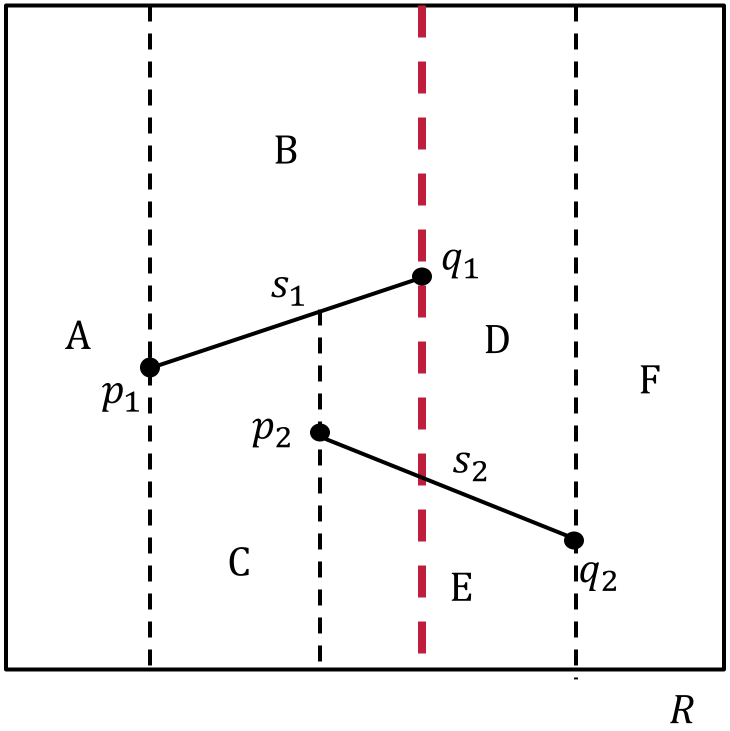
Suchstruktur:



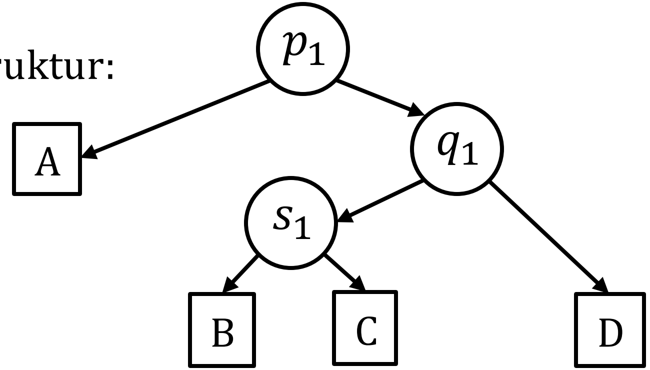
Wenn wir ein Segment hinzufügen, was passiert?
Es entstehen Flächen:

- Links von p_1
- Rechts von q_1
- Zwischen p_1 und q_1, aber unter s_1
- Zwischen p_1 und q_1, aber über s_1

Insertion-Methode

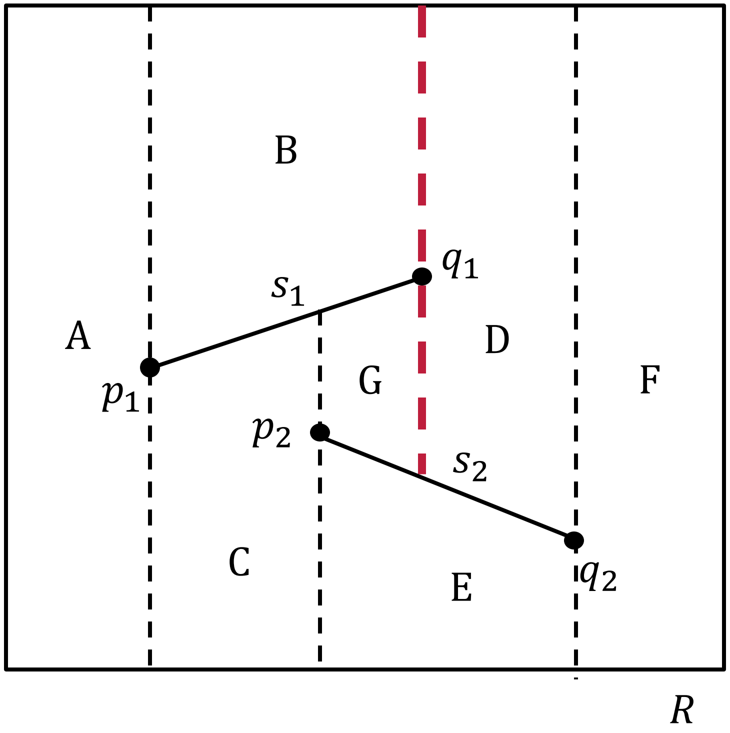


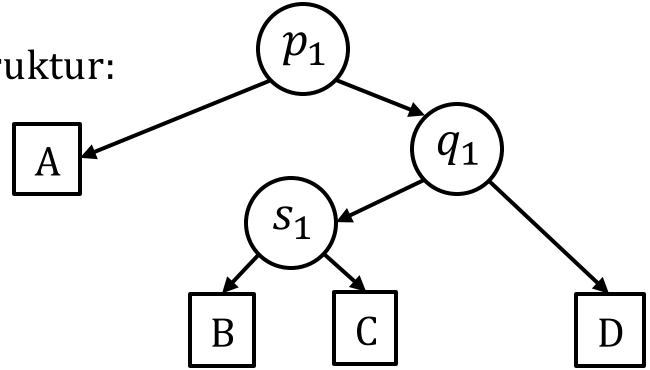
Suchstruktur:



Und wenn wir ein weiteres Segment hinzufügen?
Vertikale Erweiterungen können geschnitten werden!

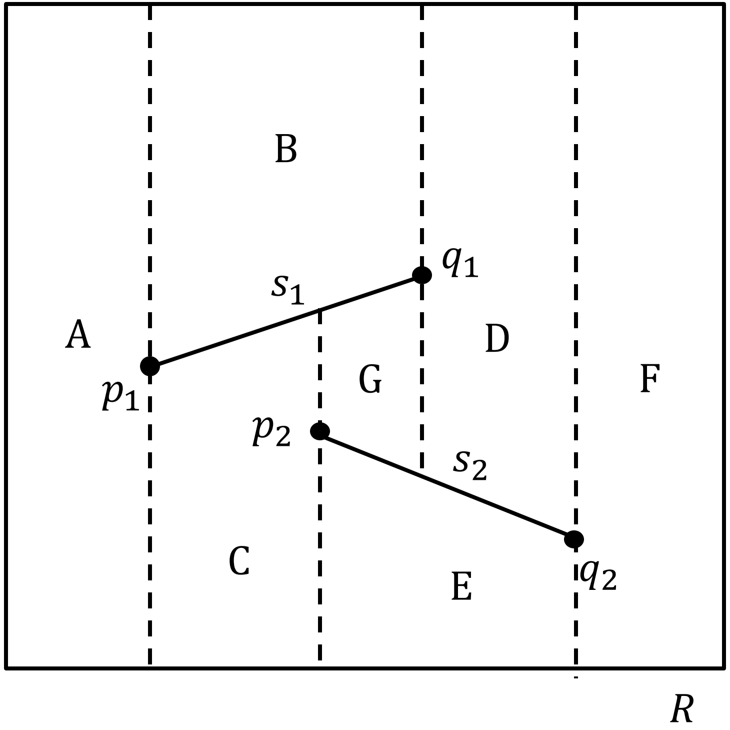
Insertion-Methode



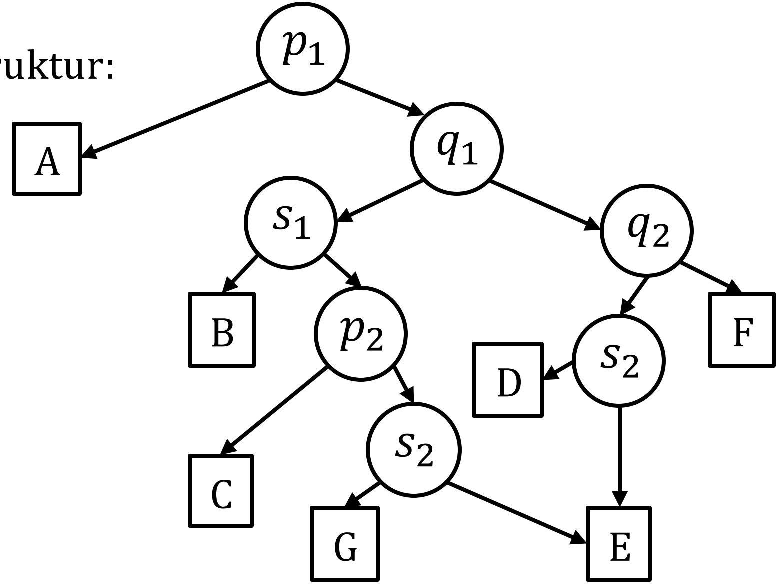


Und wenn wir ein weiteres Segment hinzufügen?
Vertikale Erweiterungen können geschnitten werden!

Insertion-Methode



Suchstruktur:



Und wenn wir ein weiteres Segment hinzufügen?
Vertikale Erweiterungen können geschnitten werden!

Fragen zur Datenstruktur

Huh? Da gibt es nun mehrere Wege, um zu einer Fläche zu gelangen!

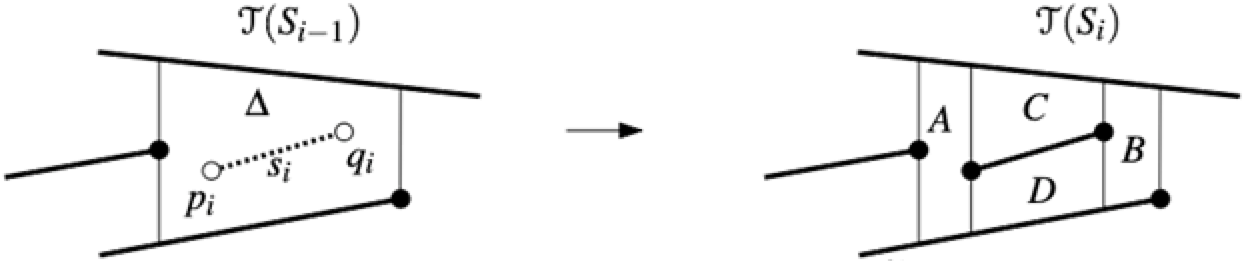
Und s_2 kommt doppelt vor!

Soll das so?!

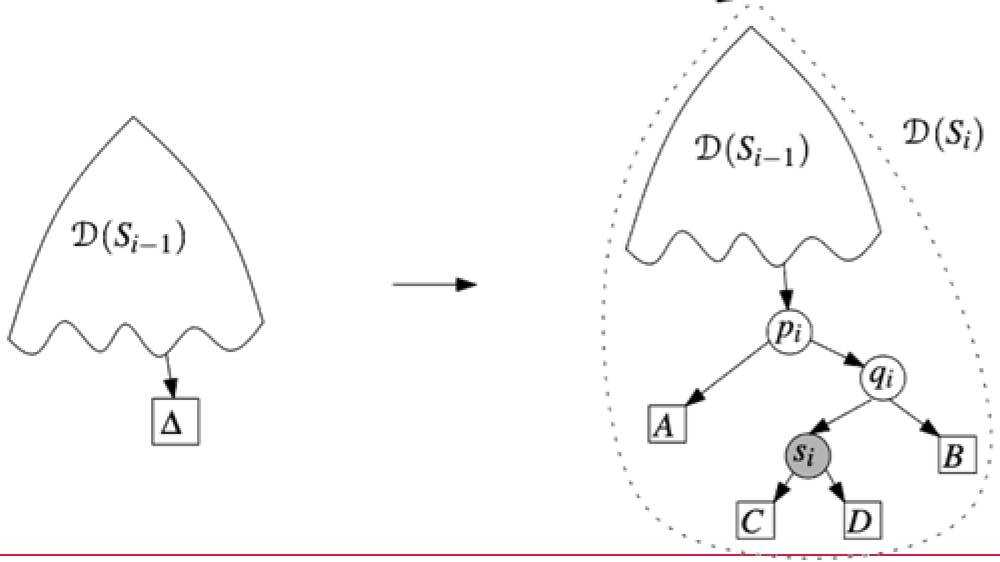
Können wir Kreise erzeugen?!

Segment einfügen – Aktualisieren der Datenstruktur

Einzufügendes Segment ist komplett in einem Trapez enthalten

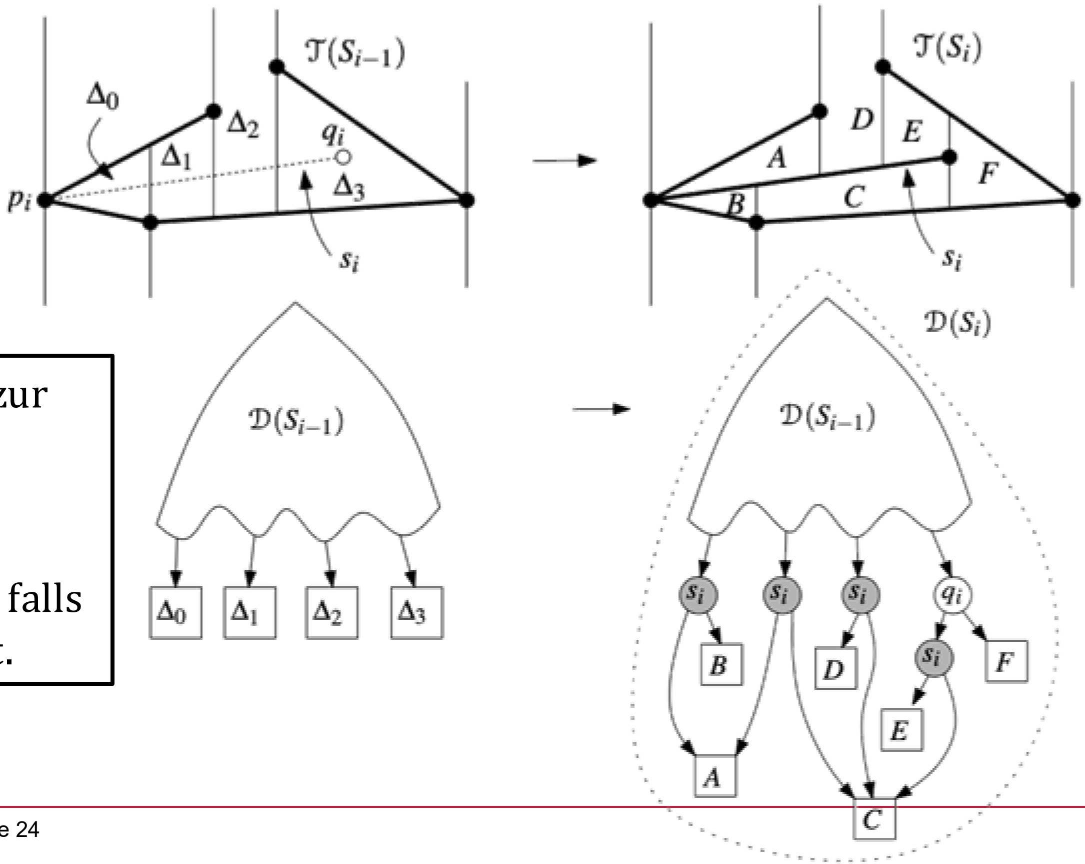


Ersetze Trapez in der DS wie beim ersten Segement.



Segment einfügen – Aktualisieren der Datenstruktur

Einzufügendes Segment schneidet mehrere Trapeze.



Ersetze alle Trapeze analog zur Abbildung:

- Nur mit Segment, falls es komplett durchgeht.
- Mit Punkt und Segement, falls der Punkt im Trapez liegt.

Gerichtete azyklische Graphen

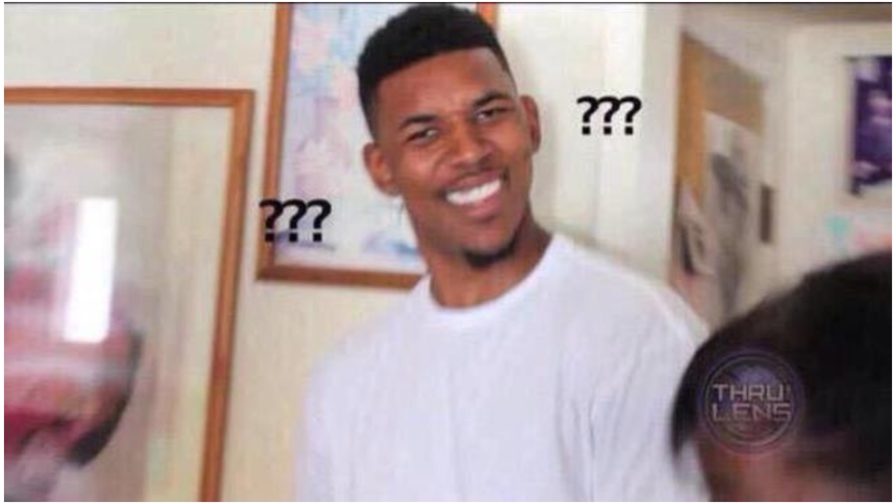
Lemma 2.44
Die Datenstruktur für eine Trapezoidal Map durch Einfügen der Segemente entsteht, ist ein gerichteter, azyklischer Graph (enthält keine gerichteten Kreise; kurz: DAG).

Wir können die Datenstruktur also von der Wurzel zu einer Fläche traversieren ohne in eine Endlosschleife zu geraten!

Im Worst-Case können wir folgendes festhalten:
- Der DAG enthält $O(n^2)$ Knoten.
- Eine Query dauert $O(n)$ Zeit.

Es bleibt eine Übung zu zeigen, dass diese asymptotischen Größen tatsächlich erreicht werden können.

Worst-Case



Average Case

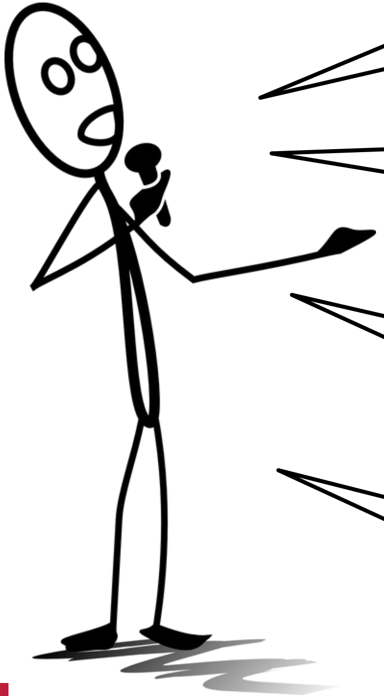
Theorem 2.45
Sei S eine Menge von nicht-schneidenen Segmenten in allgemeiner Lage. Dann gelten folgende Aussagen im Erwartungsfall.

- $\mathcal{T}(S)$ kann in Zeit $O(n \log n)$ konstruiert werden.
- Der zugehörige DAG besitzt $O(n)$ Knoten.
- Eine Punktlokalisierung im DAG benötigt $O(\log n)$ Zeit.

(Sehr kurze) Beweisskizze:
Füge die Kanten in einer zufälligen Reihenfolge in die Trapezoidal Map ein.

Für eine Analyse, siehe Buch “Computational Geometry” (Krefeld, Berg, ...) Seiten 133-136)

Randomized Incremental Construction



Ein solches Verfahren wird auch **Random Incremental Construction** (RIC) genannt.

Für die Analyse nutzt man oft die **Backwards Analysis:**

„Mit welcher Wahrscheinlichkeit trat ein bestimmtes Event mit welchem Umfang auf?“

Bei Gelegenheit schauen wir uns das Problem Smallest Enclosing Disk an.

Und ohne allgemeine Lage?

Okay, mit dem Erwartungsfall
kann ich leben.

Arber was ist mit
allgemeiner Lage?

Vertikale Segmente
tauchen sehr häufig auf!

Shear Transformation

Nutze dafür die Transformation $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\varphi(x, y) \mapsto (x + \varepsilon, y)$$