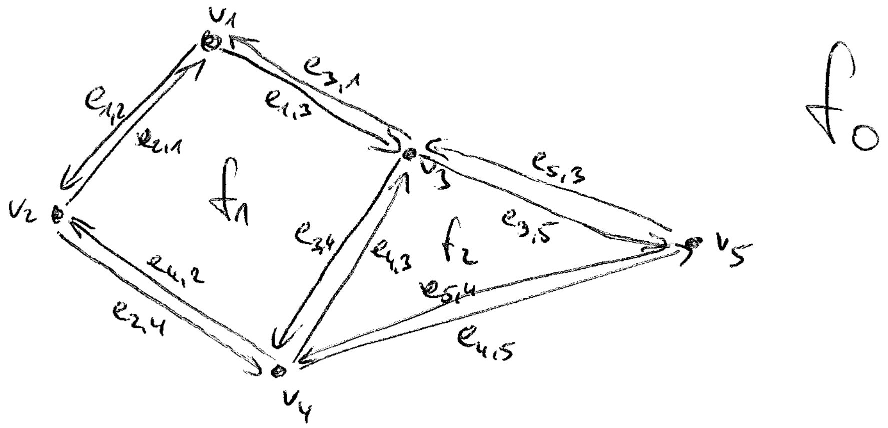
EAG 3 – DCEL, Duality



Problem 1:

Gegeben: DCEL D, Halbkante e aus D

Gesucht: Ausgabe des Kreises, auf dem e in D liegt.

(Beispiel oben: $e_{2,1}$ liegt auf dem Kreis $(e_{2,1}, e_{1,3}, e_{3,4}, e_{4,2})$)

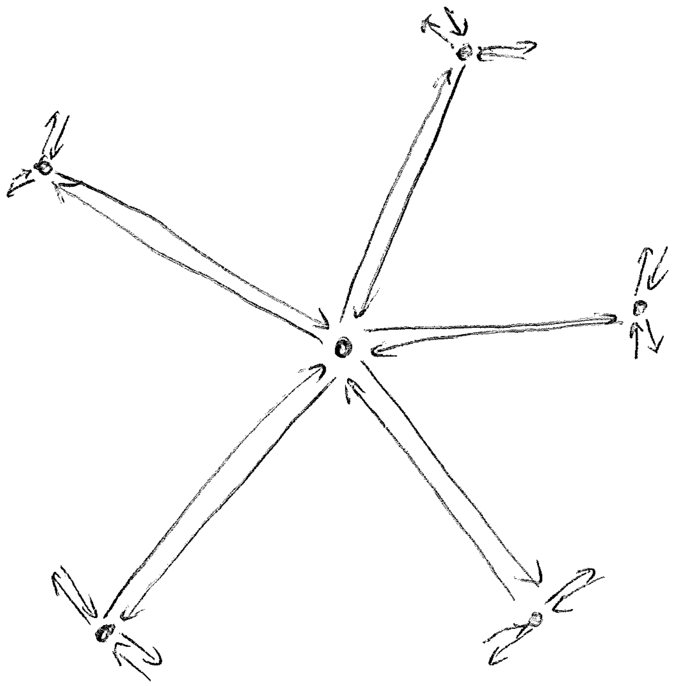
1. curr = e
2. do
3. report curr
4. curr = next(e)
5. while (curr != e)

Problem 2

Gegeben: DCEL D, Knoten v in D

Gesucht: Ausgabe aller Nachbarn von v.

```
1. e = IncidentEdge(v); curr = e
2. do
3.     report Origin(twin(curr))
4.     curr = next(twin(curr))
5. while (curr != e)
```



Problem 3

Gegeben: Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

Frage: Enthält P kollineare Punkte

Naiv: Teste Kollinearität für jedes Tripel aus $\binom{P}{3}$.
Laufzeit $O(n^3)$

Wichtig: Liegen s, p, q auf einer Linie, so ist die Linie $l_{s,p}$
identisch mit der Linie $l_{s,q}$

~~Linie~~ Gerade durch s und p

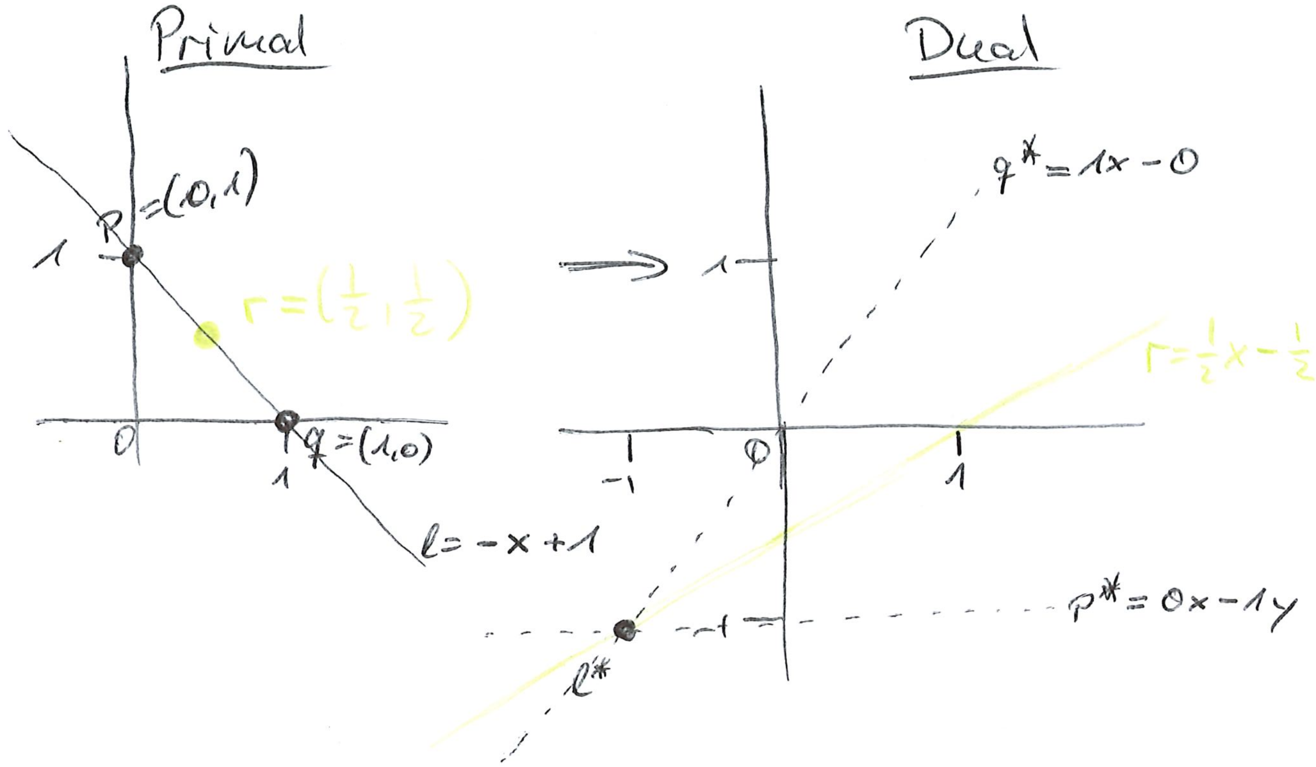
Da beide Linien durch s gehen, müssen wir nur die Steigung $\frac{y_q - y_s}{x_q - x_s}$ mit $\frac{y_p - y_s}{x_p - x_s}$ vergleichen.

$\Rightarrow$ Prüfe für jeden ~~Knoten~~ Punkten $s \in P$, ob unter allen ~~Also~~ Punkten $p \in P \setminus \{s\}$ der Wert $\frac{y_p - y_s}{x_p - y_s}$ mind. 2x vorkommt.

Mit einem balancierten ~~Daten~~ Suchbaum dauert das $O(n \log n)$ für jedes $s \in P \Rightarrow O(n^2 \log n)$

Mit Hashmaps geht das (im Erwartungsfall) sogar in $O(n^2)$.

Die Idee des Algorithmus lässt sich auch visualisieren:



Transformiere jeden Punkt $p = (p_x, p_y)$ in eine Gerade p^* mit $y = p_x x - p_y$ und jede Gerade l mit $y = mx + b$ in einen Punkt $l^* = (m, -b)$

Man kann zeigen:

Sind p, q, r kollineare Punkte, dann haben p^*, q^*, r^* einen gemeinsamen Schnittpunkt.

(Für parallele Geraden definieren wir den Schnittpunkt bei $x = \infty$)

Diese <u>Dualität</u> bietet nette Eigenschaften

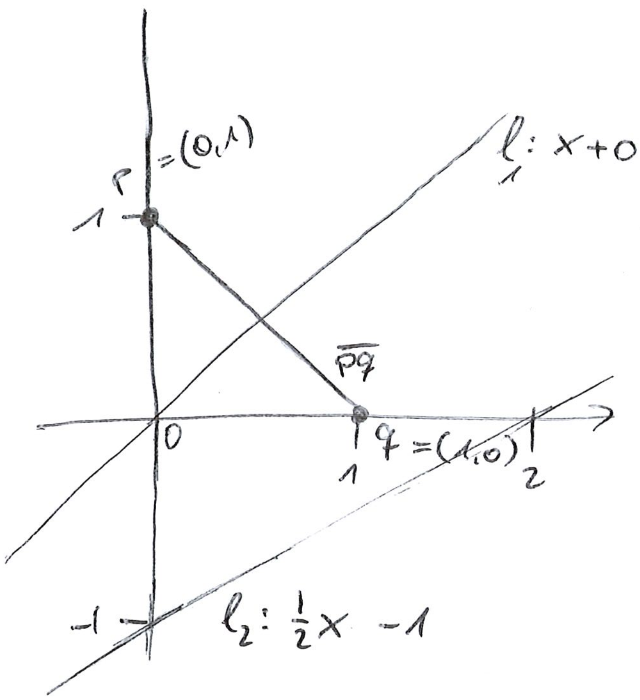
p liegt "oberhalb" von $l \Leftrightarrow l^*$ liegt oberhalb von p^*

p liegt auf $l \Leftrightarrow l^*$ liegt auf p^*

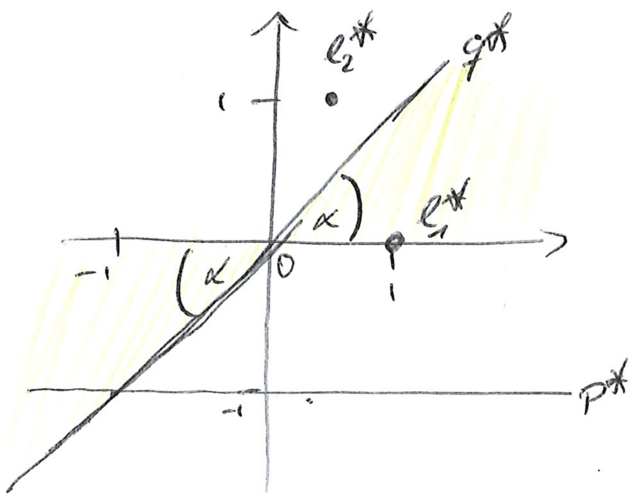
p liegt unter $l \Leftrightarrow l^*$ liegt unter p^*

"Incidence Preserving"

Wie ist das mit Segmenten?



$\Longrightarrow$



Jeder Punkt im α-Kegel entspricht einer Geraden im Primalen, welche $\overline{pq}$ schneidet!