Einführung in Algorithmische Geometrie
Dr. Arne Schmidt
Kai Kobbe

Sommer 2025
Abgabe: 03.07.2025
Besprechung: 10.07.2025

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 03.07.2025 um 13:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Minkowski Summe): **(4 Punkte)**
Zeichne die Minkowski Summe $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$, gegeben dass

a) $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ Einheitskreisscheiben sind.

b) $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ Einheitsquadrate sind.

c) $\mathcal{P}_1$ eine Einheitskreisscheibe und $\mathcal{P}_2$ ein Einheitsquadrat ist.

d) $\mathcal{P}_1$ ein Einheitsquadrat und $\mathcal{P}_2$ ein Dreieck mit Knoten $(0,0), (1,0), (0,1)$ ist.

Hinweis: Die Einheitskreisscheibe ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Einheitsquadrat ist gegeben durch die Knoten $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

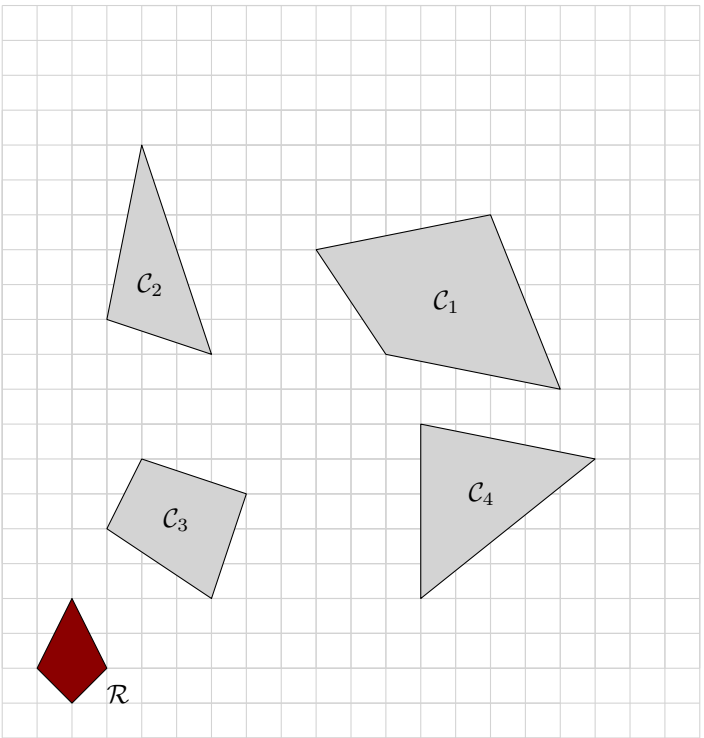

Abbildung 1

Pflichtaufgabe 2 (Configuration-Space): **(5 Punkte)**
Betrachte den Work-Space mit Hindernissen $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_4$ in Abbildung 1. Sei zusätzlich $\mathcal{R}(x, y)$ ein entlang des Vektors (x, y) verschobener Roboter, wobei $\mathcal{R}(0, 0)$ das Polygon mit Knoten $(1, 0), (0, 2), (-1, 0), (0, -1)$ ist. Markiere hierzu den freien Configuration-Space in Abbildung 1.

Pflichtaufgabe 3 (Roadmap): **(4+1 Punkte)**
Wir wollen einen Punktroboter im Work-Space aus Abbildung 2 bewegen.

a) Zeichne die Roadmap in Abbildung 2 ein.

b) Markiere einen Pfad von s nach t auf Basis der Roadmap.

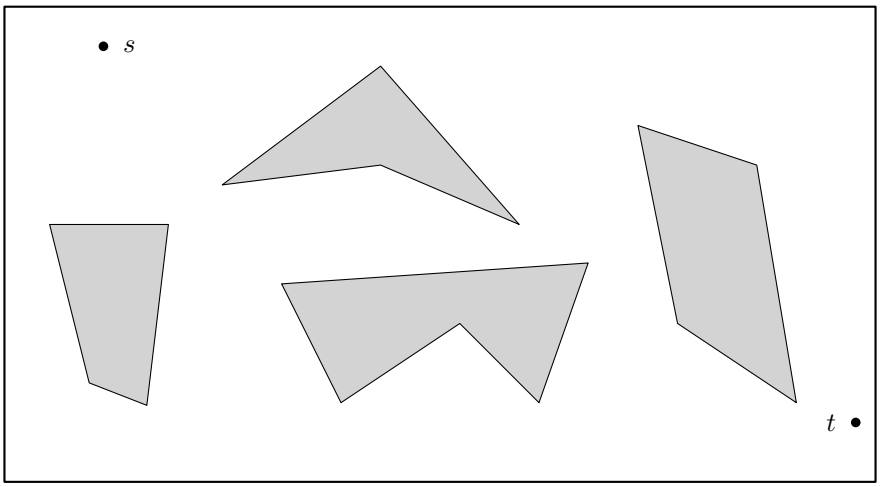

Abbildung 2

Pflichtaufgabe 4 (Tilt Motion Planning): **(6 Punkte)**
Wir wollen uns mit einer diskreteren Variante von Motion Planning befassen, in der sich ein Roboter auf einer endlichen Teilmenge des $\mathbb{Z}^2$ bewegt. Ob ein Roboter eine Position begehen darf sei spezifiziert durch eine (in konstanter Zeit berechenbare) Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$. Hierbei sind die vom Roboter begehbaren Positionen genau jene in $U := \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid f(p) = 1\}$. Erlaubte Bewegungen des Roboters können auf verschiedene Weisen definiert werden:

- *Single Step Tilt:* Ein Roboter auf Position p darf sich nur zu seinen begehbaren Nachbarpositionen bewegen, d.h. zu Positionen $p \pm (1, 0)$ und $p \pm (0, 1)$, sofern diese in U liegen.
- *Full Tilt:* Ein Roboter auf Position p muss sich so weit in eine Richtung bewegen, bis er an eine unbegehbare Position stößt, d.h. der Roboter darf sich zum Beispiel zu Position $p + (c, 0)$ bewegen sofern $f(p + (c + 1, 0)) = 0$ und $f(p + (k, 0)) = 1$ für alle $1 \leq k \leq c$. Entsprechend ist die Bewegung in die anderen drei Richtungen definiert.

Wir interessieren uns für das *Erreichbarkeitsproblem* für gegebene Start- und Zielpositionen $s, t \in U$: Entscheide, ob ein Roboter der auf s startet auf t *stehen bleiben* kann.

Zeige: In beiden Modell-Varianten kann das Problem in $O(|U|)$ Zeit entschieden werden.