Einführung in Algorithmische Geometrie
Dr. Arne Schmidt
Kai Kobbe

Sommer 2025
Abgabe: 19.06.2025
Besprechung: 26.06.2025

Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 19.06.2025 um 13:15 Uhr in der Vorlesung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Kirkpatrick's Hierarchie): **(5+1 Punkte)**
Betrachte die Triangulation in Abbildung 1. Wir wollen bestimmen, in welcher Region der Punkt p liegt.

a) Gib die finale Kirkpatrick-Hierarchie $\mathcal{H}$ an und skizziere die betrachtete Triangulation nach jedem Simplifizierungsschritt. Umkreise dabei jeweils die im nächsten Schritt als *unabhängige Menge* gewählten Knoten und benenne die Dreiecke entsprechend der Knoten in $\mathcal{H}$.

   Beachte bei der Konstruktion folgende Punkte:

   - Wähle das Independent Set per Greedy-Algorithmus aus: Gehe die Knoten in der Reihenfolge der Indizes durch und nimm dabei den Knoten falls möglich in das Independent Set auf.
   - Füge die Kanten für die Retriangulierung in lexikographischer Reihenfolge auf, d.h. falls noch Kanten hinzugefügt werden können, füge zunächst an dem Knoten mit dem kleinsten Index weitere Kanten hinzu.

b) Markiere den Suchpfad zu p in $\mathcal{H}$.

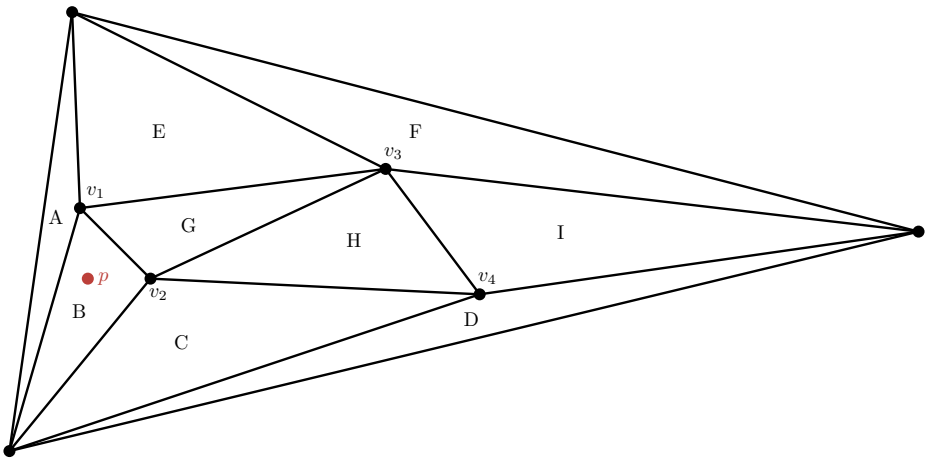

Abbildung 1

Pflichtaufgabe 2 (Triangulationen): **(2+5 Punkte)**

Eine Triangulation einer Punktemenge P entsteht durch Hinzufügen von Kanten zwischen Punkten aus P, sodass keine zwei Kanten sich schneiden und keine weitere Kante hinzugefügt werden kann.

a) Beweise die in Lemma 2.21 beschriebene Folgerung: Eine Triangulation einer Punktmenge mit n Punkten besitzt maximal $3n - 6$ Kanten.

(Hinweis: Die Polyederformel $|V| + |F| - |E| \geq 2$ darf angenommen werden.)

b) Beschreibe einen *Plane-Sweep*-Algorithmus, der n Punkte in der Ebene mit einer Laufzeit in $O(n \log n)$ trianguliert. Begründe dazu, warum dein Algorithmus die Laufzeit einhält.

Pflichtaufgabe 3 (Trapezoidal Maps): **(4+3 Punkte)**

a) Skizziere die Trapezoidal Map für das Arrangement in Abbildung 2 und gib die finale Suchstruktur $\mathcal{D}$ an, wobei die Liniensegmente in der gegebenen Reihenfolge $\ell_1 \to \ell_2 \to \ell_3$ einzufügen sind. Benenne die skizzierten Trapeze in Abbildung 2 entsprechend der Blätter in $\mathcal{D}$.

b) Konstruiere für *jedes* n eine Instanz von n Liniensegmenten und gib dazu eine Einfügereihenfolge an, sodass die Suchstruktur $\Omega(n^2)$ viele Knoten enthält und darin ein Suchpfad mit Länge in $\Omega(n)$ existiert.

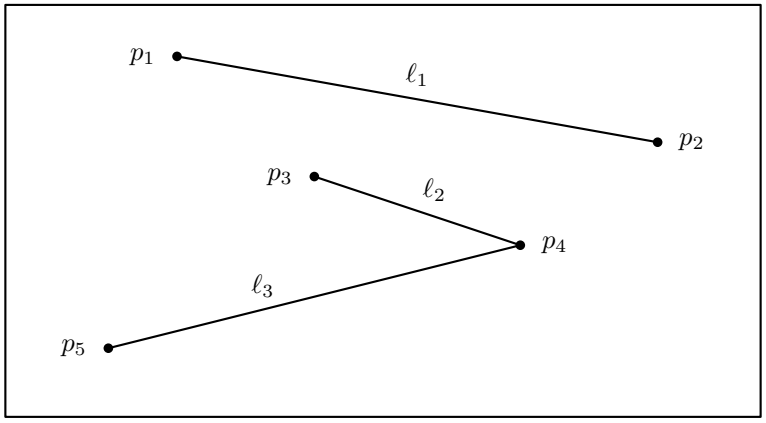

Abbildung 2